Inequalities for quantum thermodynamics in infinite space

Farzollah Mirzapour*,1, Reza Rasuli[2]

Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Zanjan, Zanjan, Iran

Department of Physics, Faculty of Science, University of Zanjan, Zanjan, Iran

Received: 16.10.2019 Final revised: 02.10.2019 Accepted: 07.07.2021

DOI: 10.22055/jrmbs.2021.16568

Abstract

In statistical mechanics, the upper limit of entropy is very important for determining the final state of the system based on the Helmholtz variational principle. Hence, many attempts have been made to calculate the entropy of the system, and a thermodynamic theory based on Renyi entropy has recently been presented that can describe new states in the thermodynamic system. The exact determination of entropy cannot be done in many cases, and therefore approximate methods are used. An approximate solution often involves obtaining a high limit for entropy, which determines the final state of the system. This paper presents an upper limit for quantum entropy. For this purpose, the calculations are carried out in a separable Hilbert space with orthogonal bases. Using the Shanon definition of entropy, the upper limit is calculated for the relative entropy of two commutative operators.

Keywords: Relative entropy, Hilbert space, thermodynamic inequality.

*Corresponding Author: f.mirza@znu.ac.ir

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

نامساوی‌هایی برای ترمودینامیک کوآنتومی در فضای نامتناهی

فرض الله میرزاپور[1,*]، رضا رسولی[2]

[1]گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

[2]گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

دریافت: 1398/08/07 ویرایش نهائی: 1398/10/09 پذیرش: 1399/11/07

DOI: 10.22055/jrmbs.2021.16568

چکیده

در مکانیک آماری دانستن حد بالای آنتروپی در تعیین وضعیت پایانی سامانه بر اساس اصل وردشی هلمهولتز بسیار حائز اهمیت است. از این رو تلاش‌های بسیاری جهت محاسبه آنتروپی سیستم صورت گرفته است و نظریهٔ ترمودینامیک بر پایه آنتروپی رنی اخیراً ارائه شده است که قادر به توصیف حالت‌های جدید در سیستم ترمودینامیکی است. تعیین دقیق آنتروپی در بسیاری از موارد قابل انجام نیست و از این رو روش‌های تقریبی به‌کار گرفته می‌شود. حل تقریبی می‌تواند شامل تعیین حد بالا برای آنتروپی باشد که وضعیت نهایی سیستم را تعیین می‌کند. در این مقاله یک حد بالا برای آنتروپی کوآنتومی ارائه می‌شود. بدین منظور محاسبات در یک فضای هیلبرت جدایی پذیر با پایه‌های یکا متعامد صورت می‌گیرد و با استفاده از تعریف شنون از آنتروپی حد بالایی برای آنتروپی نسبی دو عملگر جابه‌جا شونده محاسبه می‌گردد.

کلیدواژگان: آنتروپی نسبی، فضای هیلبرت، نامساوی ترمودینامیکی

* نویسنده مسئول: f.mirza@znu.ac.ir

باز نشر این مقاله با ذکر منبع آزاد است.

این مقاله تحت مجوز کریتیو کامنز تخصیص 4,0 بین‌المللی می‌باشد

مقدمه

طبق نظریه ترمودینامیک کلاسیک آنتروپی یک سیستم منزوی در حالت پایه بیشینه است که اصل آنتروپی بیشینه نامیده می‌شود. طبق این اصل انرژی آزاد هلمهولتز برای سیستم در حال تعادل گرمایی با محیط اطراف نیز کمینه خواهد بود و حالت نهایی سیستم با اصل کمینه انرژِی آزاد سیستم تعیین می‌شود. از آنجایی که سیستم‌های مورد بررسی در عمل حاوی عدد آووگادرو ذره هستند آنسامبل کانونیک برای توصیف این سیستمها مناسب نیست و محاسبات آنسامبل میکرو کانونیک بسیار سخت است. این دلیلی است که پژوهشگران علاقه‌مند به توصیف آماری سیستم بر پایه تعریفی متفاوت از آنتروپی وان نیومن* مانند آنتروپی رنی و تسالیس هستند [1-3]. کاملترین نظریه ترمودینامیکی بر پایه آنتروپی رنی ارائه شده است که در تعریف قوانین ترمودینامیک کوآنتومی در مقیاس نانو و میکرو حائز اهمیت است [4]. این امر با ورود نظریه اطلاعات به ترمودینامیک که نیازمند نانوفناوری و ترمودینامیک کوآنتومی است بیش از پیش حائز اهمیت می‌گردد. از این رو دانستن آنتروپی برای این سیستمها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. تعیین دقیق آنتروپی در بسیاری از موارد قابل انجام نیست و از این رو روشهای تقریبی به کار گرفته می‌شود [5-8]. حل تقریبی اغلب شامل تعیین حد بالا برای آنتروپی است که وضعیت نهایی سیستم را تعیین می‌کند.

* von Neumann
† Renyi
‡ Tsallis

در این مقاله نامساوی‌هایی برای آنتروپی کوآنتومی سیستم ارائه می‌دهیم. اغلب سیستم‌های فیزیکی در دمای محدود هستند و در چنین سیستم‌هایی فضای هیلبرت توصیف کننده سیستم، دارای ابعاد نامتناهی است و استفاده از فضای هیلبرت متناهی دقیق نیست. بدین منظور یک سیستم کوآنتومی را در نظر می‌گیریم که در فضای هیلبرت جدایی پذیر با بعد نامتناهی توصیف می‌شود. در محاسباتی که در ادامه آمده است، از نتایج یک فضای هیلبرت جدایی پذیر با پایه‌های یکا متعامد استفاده شده و نتیجه برای ابعاد نامتناهی تعمیم داده می‌شود. در نهایت با توجه به تعریف شنون از آنتروپی، حد بالایی برای آنتروپی نسبی دو عملگر جابجا شونده در فضای هیلبرت نامتناهی ارائه می‌گردد.

فرضیات و مدل

فرض می‌کنیم H یک فضای هیلبرت جدایی پذیر با بعد نامتناهی و $E=\{e_1,e_2,e_3,...\}$ پایه یکا متعامد برای آن باشد. اگر A یک عملگر روی فضای هیلبرت H باشد تعریف می‌کنیم:

$$Tr(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\langle Ae_i,e_i\rangle, \qquad 1$$

و

$$\|A\|_1=Tr(|A|)=\sum_{i=1}^{\infty}\langle (A^{\dagger}A)^{1/2}e_i,e_i\rangle. \qquad 2$$

فضای $L^1(H)$ عبارت است از تمام عملگرهای A روی H است که برای آنها $\|A\|_1<\infty$. در مرجع [9] نشان داده شده است که $\|.\|_1$یک نرم روی $L^1(H)$ و آن یک ایده‌آل از $B(H)$ است که در آن $B(H)$ دسته تمام عملگرهای خطی و کراندار

روی H می‌باشد. همچنین $F(H) \subset L^1(H) \subset K(H)$ است که در آن $F(H)$دسته تمام عملگرهای با رتبه متناهی و $K(H)$دسته تمام عملگرهای فشرده روی H اند. همچنین با نرم $\|.\|_1$، $F(H)$ در $L^1(H)$ چگال است یعنی $\overline{F(H)} = L^1(H)$.

فرض کنید H همان فضای هیلبرت جدایی پذیر با بعد نامتناهی باشد، آنگاه نمایش ماتریسی A را با $[A]_E$ نمایش می‌دهیم که عبارت است از:

$$[A]_E = \left(\langle Ae_i, e_j \rangle\right).$$

که در آن $E = \{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ پایه یکا متعامد برای H است. از اینجا به‌بعد $[A]_E$ را با همان A نشان می‌دهیم.

عملگر A را به‌طور یکانی قطری پذیرگوییم اگر عملگرهایی مانند U و D موجود باشند که U یکانی، D قطری و $A = U^\dagger DU$ باشد. اگر f نگاشت پیوسته روی دامنه‌ای حاوی مقادیر ویژه A باشد در این صورت $f(A)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$f(A) = U^\dagger f(D)U$ که f روی عناصر قطر اصلی D قرار می‌گیرد، یعنی:

$$f(diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)) = diag(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots)). \qquad 3$$

عملگر A را نیمه معین مثبت خوانیم هرگاه برای هر $x \in H$ $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ و در صورتیکه A وارون پذیر باشد A را معین مثبت خوانیم.

در ادامه بحث ازقضایای زیر استفاده خواهد شد:

قضیهٔ1 [9]: اگر $A \in L^1(H)$ و $B \in B(H)$ باشد آنگاه $AB, BA \in L^1(H)$ بوده و داریم:

$$Tr(AB) = Tr(BA). \qquad 4$$

با توجه به قضیه 1 اگر A از $L^1(H)$ به طور یکانی قطری پذیر باشد یعنی عملگری یکانی مانند U موجود باشد که $A = U^\dagger DU$ و $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots)$ آنگاه $Tr(A) = Tr(D)$. در عبارت قبلی $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\}$ مجموعه مقادیر ویژه عملگر A با $\lambda_i \geq 0$ برای $i = 1,2,3,\ldots$ است.

قضیه 2 [10]: فرض کنید A از $L^1(H)$ و $\{\lambda_n(A)\}_{n=1}^N$ با $N \leq \infty$ مقادیر ویژه A باشند. در این صورت

$$Tr(A) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n(A). \qquad 5$$

اگر A عملگر نیمه معین مثبت باشد آنگاه به‌طور یکانی قطری پذیر است و در این صورت داریم: $ln(A) = U^\dagger ln(D)U$ که در آن $ln(D) = diag(ln(\lambda_1), ln(\lambda_2), ln(\lambda_3), \ldots)$ است. لازم به‌ذکر است این رابطه ابتدا برای عملگرهای معین مثبت بیان می‌شود که با

فرض $A_\varepsilon = A+\varepsilon I$ و میل دادن $\varepsilon \to 0^+$ رابطه برای عملگرهای نیمه معین مثبت نیز برقرار می‌گردد.

قضیهٔ3 [5]: فرض کنید $A,B \geq 0$ ماتریس‌هایی از مرتبه n باشند، آنگاه:

$$A^{(1+q)/2}B^qA^{(1+q)/2} \prec_{(\log)} A^{1/2}(A^{p/2}B^pA^{p/2})^{q/p}A^{1/2} \quad ,0 < q \leq p \tag{6}$$

که در آن ترتیب ماژوریته را برای چنین عملگری به صورت زیر تعریف می کنیم:

اگر A و B دو عملگر با شرایط $A \geq 0$ و $B \geq 0$ باشند، گوییم $A \prec_{\log} B$ است اگر برای هر $n = 1,2,3,...$ داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \leq \sum_{i=1}^{n}\mu_i. \tag{7}$$

که در آن $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq ....$ برای مقادیر ویژه عملگر A و $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq ....$ برای مقادیر ویژه عملگر B است.

قضیه 4 [5]: فرض کنید $A,B \geq 0$ ماتریسهایی از مرتبه n باشند، آنگاه:

$$Tr(A(\ln A + \ln B)) \leq \frac{1}{p}Tr(A\ln(A^{p/2}B^pA^{p/2})), \qquad p > 0. \tag{8}$$

آنتروپی

اگر $p = \{p_i\}$ یک دنباله احتمالی (یعنی $p_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$) باشد، در این صورت آنتروپی شانون به‌صورت زیر تعریف می‌شود [11]:

$$S(p) = -\sum_{i=1}^{\infty} p_i \ln p_i. \tag{9}$$

قرارداد می‌کنیم $x\ln x = 0$ اگر $x = 0$ باشد.
اگر A عملگر نیمه‌معین مثبت از $L^1(H)$ باشد، تعریف می‌کنیم:

$$S(A) = -Tr(A\ln A). \tag{10}$$

از آنجا که آنتروپی کوآنتومی تحت تبدیل یکانی پایا است پس برای هر عملگر یکانی U داریم $S(U^\dagger AU) = S(A)$.

رابطهٔ10 همان رابطهٔ9 است زیرا:

$$\begin{aligned}S(A) &= -Tr(A(\ln A)) = \\ &-Tr(U^\dagger DU(\ln U^\dagger DU)) = \\ &-Tr(U^\dagger D(\ln D)U) = \\ &-Tr(D(\ln D)).\end{aligned} \tag{12}$$

اگر $D = diag(\lambda_1,\lambda_2,...)$ آنگاه :

$$S(A) = -\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i \ln \lambda_i. \tag{13}$$

پس اگر $\{\lambda_i\}$ دنباله‌ای از مقادیر ویژه A باشد آنتروپی A به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$S(A)=-\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i \ln\lambda_i . \qquad 14$$

اگر $p=\{p_i\}$ و $q=\{q_i\}$ دو دنباله احتمالی باشند، آنتروپی p و q به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(p\,||\,q)=\sum_{i=1}^{\infty}p_i \ln(\frac{p_i}{q_i}). \qquad 15$$

با این قرارداد که $x\ln x=0$ اگر $x=0$ و $x\ln y=+\infty$ اگر $x\neq 0$ و $y=0$ است.

اگر A و B دو عملگر نیمه معین مثبت از $L^1(H)$ باشند، آنتروپی آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود [1]:

$$S(A\,||\,B)=Tr(A(\ln A-\ln B)). \qquad 16$$

به‌وضوح $S(A\,||\,I)=-S(A)$ که در آن I عملگر همانی روی H است. اگر $A\geq 0$ و $B\geq 0$ باشند تعریف می‌کنیم:

$$\hat{S}(A\,|\,B)=A^{1/2}\ln(A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}. \qquad 17$$

رابطهٔ17 برای عملگرهای نیمه‌معین مثبت نیز بر قرار است زیرا با فرض $A_\varepsilon=A+\varepsilon I$ $(\varepsilon>0)$ عملگر وارون پذیر است و با $\varepsilon\to 0^+$ رابطه صحیح خواهد بود. اگر A و B جابجاپذیر باشند از آنجا که به‌طور یکانی قطری پذیرند (با توجه به ضمیمه) داریم:

$$-Tr\hat{S}(A\,|\,B)=S(A\,||\,B)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i \ln(\frac{\lambda_i}{\mu_i}). \qquad 18$$

که در آن $\{\lambda_i\}$ و $\{\mu_i\}$به ترتیب مقادیر ویژه A و B هستند.

نامساوی لگاریتمی رد

اگر A عملگری فشرده و نرمال در $B(H)$ باشد، آنگاه A به‌طور یکانی طبق تعریف قبلی در قضیهٔ1 قطری پذیر است. اگر $A\geq 0$ باشد می‌توان عملگر یکانی U را طوری در نظر گرفت تا $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\lambda_3\geq\ldots$ باشد. اگر $B\geq 0$ در $B(H)$ باشد و $\alpha\geq 0$ و $\beta\geq 0$ اعدادی حقیقی باشند داریم:

$$\begin{aligned}A^{\alpha}B^{\beta}A^{\alpha}&=(UDU^{\dagger})^{\alpha}B^{\beta}(UDU^{\dagger})^{\alpha}=\\ UD^{\alpha}U^{\dagger}B^{\beta}UD^{\alpha}U^{\dagger}&=UD^{\alpha}(U^{\dagger}BU)^{\beta}D^{\alpha}U^{\dagger}=\\ UD^{\alpha}{B_1}^{\beta}D^{\alpha}U^{\dagger}.\end{aligned} \qquad 20$$

به‌منظور استفاده از نتایج گزارش شده در مرجع [5] بایستی یکسری عملیات ماتریسی انجام شود تا نامساوی برای سیستم با بعد نامتناهی به‌دست آید که در ادامه این بخش ارائه می‌شود. اگر $S=\begin{pmatrix}S_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ماتریس بلوکی و S_1 یک ماتریس مربعی با بعد متناهی باشد و نیز اگر T یک ماتریس با بعد نامتناهی باشد می‌توان نوشت $T=\begin{pmatrix}T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{pmatrix}$ که در آن T_{11} از مرتبه S_1 است و در این صورت می‌توان نوشت:

$$STS=\begin{pmatrix}S_1T_{11}S_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \qquad 21$$

حال اگر $D_n = diag(\lambda_1,...,\lambda_n)$ و $\tilde{D}_n = diag(\lambda_1,...,\lambda_n,0,0,...)$ و $B_1 = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ باشد آنگاه بنابر رابطه قبلی داریم:

$$U\tilde{D}_n^{\alpha} B_1^{\beta} \tilde{D}_n^{\alpha} U^{\dagger} = U\begin{pmatrix} D_n^{\alpha} B_{11}^{\beta} D_n^{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^{\dagger}. \quad 22$$

با این تعریف می‌توان قضیه زیر را نشان داد:

قضیه5: اگر $A,B \ge 0$ از $L^1(H)$ باشند، آنگاه

$$A^{\frac{1+q}{2}} B^q A^{\frac{1+q}{2}} \prec_{log} A^{1/2}(A^{p/2}B^pA^{p/2})^{q/p}A^{1/2}, \quad 0 < q \le p \quad 23$$

برهان: چون A عملگری نیمه معین مثبت است، پس عملگر یکانی مانند U وجود دارد که $A = UDU^{\dagger}$ و در آن $D = diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,...)$ و λ_iها مقادیر ویژه حقیقی نامنفی A هستند. U را طوری در نظر می‌گیریم که $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \lambda_3 \ge ...$، اگر $\tilde{D}_n = diag(\lambda_1,...,\lambda_n,0,0,...)$ و $D_n = diag(\lambda_1,...,\lambda_n)$ باشند. آنگاه

$$A^{\frac{1+q}{2}} B^q A^{\frac{1+q}{2}} = UD^{\frac{1+q}{2}} U^{\dagger} B^q U D^{\frac{1+q}{2}} U^{\dagger} = UD^{\frac{1+q}{2}} (U^{\dagger}BU)^q D^{\frac{1+q}{2}} U^{\dagger} = UD^{\frac{1+q}{2}} B_1^q D^{\frac{1+q}{2}} U^{\dagger}, \quad 24$$

به‌طور مشابه داریم:

$$A^{1/2}(A^{p/2}B^pA^{p/2})^{q/p}A^{1/2} = UD^{1/2}(D^{p/2}B_1^pD^{p/2})^{q/p}D^{1/2}U^{\dagger}. \quad 25$$

چون قضیه1,2 از [5] به‌صورت زیر برقرار است:

$$D_n^{\frac{1+q}{2}} B_{11} D_n^{\frac{1+q}{2}} \prec_{log} D_n^{1/2}(D_n^{p/2}B_{11}^pD_n^{p/2})^{q/p}D_n^{1/2}. \quad 26$$

پس داریم:

$$U(\tilde{D}_n^{\frac{1+q}{2}} B_1^q \tilde{D}_n^{\frac{1+q}{2}})U^{\dagger} \prec_{log} U(\tilde{D}_n^{1/2}(\tilde{D}_n^{p/2}B_1^p\tilde{D}_n^{p/2})^{q/p}\tilde{D}_n^{1/2})U^{\dagger}. \quad 27$$

که برای هر $n = 1,2,3,...$ برقرار است.

اگر $n \to \infty$ آنگاه اثبات کامل است زیرا $B(H)$ یک فضای برداری نرم دار است که حد با نرم آن محاسبه شده است.

قضیهٔ6 که در ادامه می آید یک نتیجهٔ مستقیم از قضیه 5 برای فضای $L^1(H)$ است:

قضیهٔ6: اگر $A,B \ge 0$ از $L^1(H)$ باشند، آنگاه

$$Tr(A(\ln A + \ln B)) \le \frac{1}{p} Tr(A \ln(A^{p/2}B^pA^{p/2})). \quad 28$$

که در آن $p > 0$

برهان: بنابر قضیه قبل و قضیهٔ1 داریم:

$$Tr(A^{1+q}B^q) \le Tr(A(A^{p/2}B^pA^{p/2})^{q/p}). \quad 29$$

برای $q=0$ هر دو طرف برابر $Tr(A)$ است و با توجه به قضیهٔ2,2 از [5] داریم:

$$\frac{d}{dq}Tr(A^{1+q}B^{q})|_{q=0} \leq$$

$$\frac{d}{dq}Tr(A(A^{p/2}B^{p}A^{p/2})^{q/p})|_{q=0}. \quad 30$$

که در آن $0<q\leq p$، اگر $p\to 0$ خواهیم داشت:

$$Tr(A(\ln A+\ln B)) \leq \frac{1}{p}Tr(A\ln(A^{p/2}B^{p}A^{p/2})). \quad 31$$

و بدین ترتیب قضیه به اثبات می رسد.

برای $A,B\geq 0$ از رابطهٔ28 داریم:

$$S(A||B) \leq -\frac{1}{p}Tr(\hat{S}(A^{p}|B^{p})A^{1-p}). \quad 32$$

که برای هر $p>0$ برقرار است. باید توجه کرد که چون $A,B\in L^{1}(H)$ است قطعاً A و B وارونپذیر نیستند (زیرا فضای H با بعد نامتناهی است.) بنابراین با فرض $B_{\varepsilon}=B+\varepsilon I$ و $A_{\varepsilon}=A+\varepsilon I$ ($\varepsilon>0$) که هر دو وارون پذیرند و می‌توان نوشت:

$$S(A_{\varepsilon}||B_{\varepsilon}) \leq \frac{-1}{p}Tr(\hat{S}(A_{\varepsilon}|B_{\varepsilon})A_{\varepsilon}). \quad 33$$

و اگر $\varepsilon\to 0$ باز هم رابطهٔ32 برقرار است. اگر در رابطهٔ32، $p=1$ باشد و $\varepsilon\to 0^{+}$، خواهیم داشت:

$$S(A||B) \leq -Tr(\hat{S}(A|B)). \quad 34$$

برای $0\leq\alpha\leq 1$ میانگین α-توان $A\geq 0$ و $B\geq 0$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A\#_{\alpha}B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{\alpha}A^{1/2}. \quad 35$$

بنابر تعریف $A\#_{0}B=A$ و $A\#_{1}B=B$ و $A\#B=A\#_{1/2}B$ همان میانگین هندسی از A و B است. اگر $AB=BA$ باشد، $A\#B=(AB)^{1/2}$ است، همچنین:

$$\frac{d}{d\alpha}A\#_{\alpha}B|_{\alpha=0} = \hat{S}(A|B). \quad 36$$

بحث و نتایج

نتیجهٔ1: اگر $A\geq 0$ و $B\geq 0$ از $L^{1}(H)$ و $0\leq\alpha\leq 1$ باشد آنگاه:

$$S(A||(A^{r}\#_{\alpha}B^{s})^{t/p}) \leq \frac{-1}{p}Tr(\hat{S}(A^{p}|((A^{r}\#_{\alpha}B^{s})^{t}A^{1-p}). \quad 37$$

که برای هر $r,s\geq 0$ ، $t\geq 1$ و $p>0$ برقرار است.

برهان: با جایگذاری $(A^{r}\#_{\alpha}B^{s})^{t/p}$ به جای B در رابطهٔ32 نتیجه حاصل است.

اما برای نتیجه زیر با توجه به فرمول لی-تروتر [12] برای عملگرهای نیمه معین مثبت X,Y داریم:

$$e^{X+Y} = lim_{p\to 0}(e^{pX/2}e^{pY}e^{pX/2})^{1/p}. \quad 38$$

$$e^{(1-\alpha)X+\alpha Y} = lim_{p\to 0}(e^{pX}\#_{\alpha}e^{pY})^{1/p}. \quad 39$$

نتیجهٔ2: اگر $A,B\geq 0$ از $L^{1}(H)$ و $0\leq\alpha\leq 1$ و $p>0$ آنگاه:

$$\frac{1}{p}Tr(A\ln(A^p\#_\alpha B^p)) + \frac{\alpha}{p}Tr(A\ln(A^{p/2}B^pA^{p/2})) \geq Tr(A\ln A). \quad 40$$

و وقتی که $p \to 0$ طرف چپ معادله به $Tr(A\ln A)$ میل خواهد کرد.

برهان: در نتیجهٔ1 با فرض $t=1$ و $p=r=s$ چون:

$$S(A||(A^p\#_\alpha B^p)^{1/p}) = Tr(A\ln A) - \frac{1}{p}Tr(A\ln(A^p\#_\alpha B^p)). \quad 41$$

و

$$Tr(\hat{S}(A^p\,|\,A^p\#_\alpha B^p)A^{1-p} = -\alpha Tr(A\ln(A^{p/2}B^{-p}A^{p/2})). \quad 42$$

که نامساوی نتیجه را به‌دست می‌دهد و حالا برای اثبات قسمت آخر نتیجه اگر در رابطهٔ38، $X=\ln A$ و $Y=\ln B$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\lim_{p\to 0}\ln(A^{p/2}B^{-p}A^{p/2})^{1/p} = \ln A - \ln B. \quad 43$$

با اعمال عبارات بالا قسمت پایانی نتیجه حاصل می‌شود. بنابر نتیجهٔ اخیر خواهیم داشت:

$$S(A||(A^p\#_\alpha B^p)^{1/p}) \leq \frac{-\alpha}{p}Tr(\hat{S}(A^p\,|\,B^p)A^{1-p}). \quad 44$$

اگر $p \to 0$ هر دو طرف عبارت فوق به $\alpha S(A,B)$ میل خواهد کرد.

جمع بندی

یک حد بالا برای آنتروپی کوآنتومی در فضای هیلبرت نامتناهی ارائه شد. بدین منظور از محاسبات گزارش شده برای یک فضای هیلبرت جدایی پذیر با پایه‌های یکا متعامد استفاده و نتایج برای فضای هیلبرت نامتناهی تعمیم داده شد. در نهایت با استفاده از تعریف شنون از آنتروپی، حد بالایی برای آنتروپی نسبی دو عملگر جابه‌جا شونده ارائه گردید که برای سیستم‌های فیزیکی در دمای محدود قابل استفاده است.

مرجع‌ها

[1] D.A. Edwards, *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton university press, (1979). ISBN: 9780691178561

[2] A. Rényi, *On measures of entropy and information*, Hungarian Academy of Sciences, Budapest Hungary, (1961). https://projecteuclid.org/euclid.bsmsp/1200512181

[3] N. Bebiano, J. da Providência, J.P. da Providência, Renyi's quantum thermodynamical Inequalities, *The Electronic Journal of Linear Algebra*, **33** (2017) 63-73. https://doi.org/10.13001/1081-3810.3665

[4] A. Misra, U. Singh, M.N. Bera, A. Rajagopal, Quantum Rényi relative entropies affirm universality of thermodynamics, *Physical Review E*, **92(4)** (2015) 042161. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.042161

[5] N. Bebiano, R. Lemos, J. Da Providência, Inequalities for quantum relative entropy, *Linear Algebra and its Applications*, **401** (2005) 159-72. https://doi.org/10.1016/j.laa.2004.03.023

[6] F. Hiai, Equality cases in matrix norm inequalities of Golden-Thompson type, *Linear and Multilinear Algebra*, **36(4)** (1994) 239-49. https://doi.org/10.1080/03081089408818297

[7] F. Hiai, D. Petz, The Golden-Thompson trace inequality is complemented. *Linear Algebra and its Applications*, **181** (1993) 153-85. https://doi.org/10.1016/0024-3795(93)90029-N

[8] T. Ando, F. Hiai, Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities, *Linear Algebra and its Applications*, **197** (1994) 113-31. https://doi.org/10.1016/0024-3795(94)90484-7

[9] G.J. Murphy, *C*-algebras and operator theory*, Academic press (2014). https://doi.org/10.1016/C2009-0-22289-6

[10] S. Power, Another proof of Lidskii's theorem on the trace, *Bulletin of the London Mathematical Society*, **15(2)** (1983) 146-8. https://doi.org/10.1112/blms/15.2.146

[11] C. Shannon, W. Weaver, *The mathematical theory of communication*, University of illinois, Urbana, (1949). https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x

[12] H.F. Trotter, On the product of semi-groups of operators, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **10** (1959) 545-551. https://doi.org/10.2307/2033649

ضمیمه

اثبات رابطه 18:

چون $AB = BA$ است و هرودو قطری پذیر، لذا عملگری یکانی چون U و عملگرهای قطری مانند D_1 و D_2 وجود دارد که $B=U^{\dagger}D_2U$ و $A=U^{\dagger}D_1U$ و در آن $D_1 = diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,...)$ و $D_2 = diag(\mu_1,\mu_2,\mu_3,...)$ است. بنابراین:

$$
\begin{aligned}
S(A\,||\,B) &= Tr(A(ln\,A - ln\,B)) = Tr(U^{\dagger}D_1U(ln(U^{\dagger}D_1U) - ln(U^{\dagger}D_2U)) \\
&= Tr(U^{\dagger}D_1(ln(D_1) - ln(D_2)U) = Tr(D_1(ln(D_1) - ln(D_2)) \\
&= Tr(diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,...)diag(ln\frac{\lambda_1}{\mu_1},ln\frac{\lambda_2}{\mu_2},...)) = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_i\,ln(\frac{\lambda_i}{\mu_i})
\end{aligned}
$$