No hair theorem for scalar field models with non-minimal derivative coupling around a reflecting star

Hossein Mohseni Sadjadi*, Mahdi Khodaei

Department of Physics, College of Science, University of Tehran

Received: 07.06.2020 Final revised: 19.10.2020 Accepted: 02.11.2020

DOI: 10.22055/JRMBS.2020.16184

Abstract

Studying scalar field around black holes in the context of the no-hair theorem is an important subject. We investigate no scalar hair theorem for an asymptotically flat horizon-less neutral compact reflecting star. A reflecting star is an object with reflecting boundary condition (instead of absorbing event horizon) which the scalar fields or its derivative are zero on this surface. In the kinetic part, the scalar field is non-minimally coupled to the Einstein tensor which means we have non-minimal derivative coupling of scalar fields to the Einstein tensor. We show that in contrast to the black hole cases, there is no non-trivial hair in this problem.

Keywords: No hair theorem, Non-minimal derivative coupling, Scalar field, Reflecting star

* Corresponding Author: mohsenisad@ut.ac.ir

قضیۀ بی‌مویی برای مدل‌های میدان اسکالر با جفت‌شدگی غیر کمینۀ مشتق در مجاورت ستارۀ بازتابنده

حسین محسنی سجادی*، مهدی خدایی

دانشکده فیزیک، پردیس علوم، دانشگاه تهران، تهران، ایران

دریافت: 1399/03/18 ویرایش نهائی: 1399/07/28 پذیرش: 1399/08/12

DOI: 10.22055/JRMBS.2020.16184

چکیده

مطالعۀ میدان اسکالر در مجاورت سیاه‌چاله‌ها تحت عنوان قضیۀ بی‌مویی میدان اسکالر موضوعی جالب است. قضیۀ بی‌مویی را برای ستارۀ بازتابی بدون افق و با فضا زمان خارجی مجانبی تخت بررسی می‌کنیم. ستارۀ بازتابی موجودی است با سطح مرزی بازتابی (برخلاف سیاه چاله با افق رویداد جاذب) که میدان یا مشتق آن روی این سطح برابر صفر است. فرض می‌شود مشتق میدان اسکالر به‌صورت غیر کمینه به تانسور اینشتین جفت شده است به‌بیان دیگر به‌جای جفت‌شدگی غیر کمینۀ خود میدان اسکالر، جفت‌شدگی غیر کمینۀ مشتق میدان اسکالر با تانسور اینشتین را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. نشان می‌دهیم برخلاف مورد سیاه چاله‌ها، موی غیر بدیهی در این مسئله وجود ندارد.

کلیدواژگان: قضیۀ بی‌مویی، جفت‌شدگی غیر کمینه، میدان اسکالر، ستارۀ بازتابی

مقدمه

طبق قضیۀ بی‌مویی[1] [1]، سیاه چاله‌ها را می‌توانیم به‌صورت یکتا با استفاده از سه پارامتر جرم، اندازۀ حرکت زاویه‌ای و بار الکتریکی توصیف کنیم. بنابراین مشخصه‌های دیگر یک ذره پس از عبور از افق سیاه چاله ناپدید می‌گردد. بنابراین خارج از یک سیاه‌چاله، تنها میدان‌های گرانش و الکتریکی (که از قانون گاؤس پیروی می‌کنند) قابلیت نمایان شدن را دارند.

همان‌طور که می‌دانیم قانون گاؤس برای میدان‌های اسکالر صادق نیست و لذا نمی‌توان انتظار داشت که جفت شدن کمینۀ این میدان با گرانش منجر به ظهور موی اسکالر شود، که به‌تفصیل به‌مقایسۀ قضیۀ بی‌مویی برای میدان‌های اسکالر و الکتریکی پرداخته شده است [2].

با بررسی قضیۀ بی‌مویی برای یک میدان اسکالر در اطراف سیاه‌چاله [4-2]، می‌توان نشان داد که میدان‌های اسکالر جرم‌دار ایستا نیز نمی‌توانند توسط سیاه‌چاله‌های با فضا زمان خارجی مجانبی تخت و نیز ستاره‌های بازتابی حمایت شوند [10-5]. افق یک سیاه‌چاله کلاسیکی طی یک فرایند برگشت‌ناپذیر مواد و

*نویسندۀ مسئول: mohsenisad@ut.ac.ir

[1] No Hair Theorem

میدان‌های اطراف خود را جذب می‌کند و لذا حمایت نشدن میدان اسکالر توسط سیاه‌چاله را می‌توانیم به خاصیت جاذب بودن افق سیاه‌چاله‌ها نسبت دهیم. در راستای همین موضوع ممکن است این سؤال مطرح شود که چه موقع می‌توانیم از این رفتار بی‌مویی اسکالری به‌عنوان یکی از ویژگی‌های سیاه‌چاله‌ها بحث کنیم؟ بنابراین یافتن قضایایی مشابه با قضیهٔ بی‌مویی برای دیگر فضا زمان‌های بدون افق می‌تواند نتایج جالبی به‌همراه داشته باشد.

اخیراً هُد[1] قضیهٔ بی‌مویی‌ای را برای فضا زمان‌های مجانبی تخت حاصل از یک ستارهٔ بازتابی فشردهٔ خنثی و بدون افق[2] با یک میدان اسکالر جرم دار و انتخاب یک پتانسیل مثبت[3] که کمینهٔ آن صفر است مطرح کرده است [11]. در این بررسی قضیهٔ بی‌مویی برای میدان اسکالری که با اسکالر ریچی جفت‌شدگی غیر کمینه دارد و متریک پس زمینه مربوط به فضا زمان اطراف یک ستارهٔ بازتابی[4] است، مورد مطالعه قرار گرفته است [12]. در راستای مطالعات صورت گرفته توسط هُد، تلاش کردیم تا همین مسئله را برای جفت‌شدگی غیر کمینهٔ مشتق میدان اسکالر با تانسور اینشتن[5] بررسی کنیم. مدل جفت‌شدگی غیر کمینهٔ جملهٔ جنبشی میدان اسکالر با تانسور اینشتین پیش از این نیز مورد توجه قرار گرفته است. به‌عنوان مثال این مدل توسط جرمانی[6] و برای بررسی تورم کیهانی استفاده شده است [13-15]. این مدل را می‌توان زیر مجموعه‌ای از مدل‌های تعمیم یافتهٔ هوردنسکی[7] در نظر گرفت. همان‌طور که در ادامه نشان خواهیم داد معادلات حرکت میدان در این حالت بسیار پیچیده‌تر از حالت جفت‌شدگی غیر کمینهٔ میدان اسکالر است. برای بررسی این سیستم معادلات متریک پس زمینه را به فرم [16] در نظر گرفتیم و معادلهٔ میدان اسکالر را در حضور یک ستارهٔ بازتابی با متریک پس زمینهٔ مفروض حل کردیم.

جفت‌شدگی غیر کمینهٔ مشتق میدان اسکالر با تانسور اینشتین

کنش سیستمی را که در آن مشتق میدان اسکالر با تانسور اینشتین جفت‌شدگی غیر کمینه دارد به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$\boldsymbol{S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{R}{8\pi} - \left[\epsilon g_{\mu\nu} + kG_{\mu\nu}\right]\psi^{,\mu}\psi^{,\nu} - 2V(\psi)\right)} \qquad 1$$

که در رابطهٔ بالا $G_{\mu\nu}$ تانسور اینشتین، $g_{\mu\nu}$ متریک، Ψ میدان اسکالر، $V(\psi)$ پتانسیل میدان اسکالر و ϵ, k ضرایب جفت‌شدگی هستند. با محاسبهٔ وردش این کنش نسبت به متریک، معادلات میدان اینشتین حاصل می‌شوند

$$G_{\mu\nu} = 8\pi\left[\epsilon T_{\mu\nu} + k\Theta_{\mu\nu}\right] - 8\pi g_{\mu\nu}V(\psi) \qquad 2$$

[1] Shahar Hod
[2] Asymptotically flat horizonless neutral compact reflecting star.
[3] $V = \mu\psi^2$

[4] ستارهٔ بازتابی به ستاره‌ای اطلاق می‌شود که یک سطح (فرضی) مرزی بازتابی که خود میدان اسکالر یا مشتق آن روی این سطح صفر باشد، در خارج از ماده ستاره بر ستاره محیط شده باشد.

[5] Non minimal derivative coupling
[6] Cristiano Germani
[7] Hordenski

که در آن

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu\psi\nabla_\nu\psi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\psi\nabla^\alpha\psi \qquad 3$$

و

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_\mu\psi\nabla_\nu\psi R + 2\nabla_\alpha\psi\nabla_{(\nu}\psi R^{\alpha}_{\nu)} + \nabla^\alpha\psi\nabla^\beta\psi R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\mu\nabla^\alpha\psi\nabla_\nu\nabla_\alpha\psi - \nabla_\mu\nabla_\nu\psi\Box\psi - \frac{1}{2}(\nabla_\alpha\psi\nabla^\alpha\psi)G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\left[-\frac{1}{2}\nabla^\alpha\nabla^\beta\psi\nabla_\alpha\nabla_\beta\psi + \frac{1}{2}(\psi)^2 - \nabla_\alpha\psi\nabla_\beta\psi R^{\alpha\beta}\right] \qquad 4$$

وردش کنش نسبت به میدان اسکالرمنجر به معادلهٔ

$$[\epsilon g^{\mu\nu} + kG^{\mu\nu}]\nabla_\mu\nabla_\nu\psi = V_\psi \qquad 5$$

می‌شود. V_ψ در رابطهٔ بالا معرف مشتق پتانسیل اسکالر نسبت به میدان اسکالر ψ، است. متریک [16]

$$ds^2 = -N(r)A(r)dt^2 + A^{-1}(r)dr^2 + r^2\,d\Omega^2 \qquad 6$$

را به‌عنوان متریک توصیف کنندهٔ یک فضا زمان مجانباً تخت با تقارن کروی در نظر می‌گیریم، که در آن N(r) تابعی دلخواه از مختصهٔ شعاعی است و

$$A(r) = 1 - \frac{2M}{r}$$

بنابراین در فضایی با رفتار مجانبی تخت

$$\lim_{r\to\infty} A(r) = 1$$

$$\lim_{r\to\infty} N(r) = 1$$

معادلات حرکت حاصل از کنش مسئله برای متریک در حالت کلی به‌صورت زیر خواهند بود [17]

$$\frac{A'}{Ar} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{Ar^2} = -4\pi\psi'^2 - 8\pi A^{-1}V(\psi) + 8\pi k\psi'^2\left[\frac{3A'}{2r} + \frac{A}{2r^2} + \frac{1}{2r^2}\right] + 16\pi k\frac{A}{r}\,\psi'\psi'' \qquad 7$$

$$\frac{A'}{Ar} + \frac{1}{r^2} + \frac{N'}{rN} - \frac{1}{Ar^2} = 8\pi k\psi'^2\left[\frac{3A'}{2r} + \frac{3A}{2r^2} + \frac{3AN'}{2Nr} - \frac{1}{2r^2}\right] - 8\pi A^{-1}V(\psi) + 4\pi\psi'^2 \qquad 8$$

$$2N\frac{A''}{A} + 2N'' + 3\frac{N'A'}{A} + 2\frac{N'}{r} - \frac{N'^2}{N} + 4\frac{NA'}{Ar} = -16\pi N\psi'^2 - 32\pi A^{-1}NV(\psi) + 8\pi k\,\psi'\psi''\left[2NA' + 2AN' + 4N\frac{A}{r}\right] + 8\pi K\psi'^2\left[A''N + N''A + N\frac{A'^2}{A} - \frac{A\,N'^2}{2N} + \frac{5}{2}A'N' + \frac{N'A}{r} + \frac{4NA'}{r}\right] \qquad 9$$

$$A\left[kr\left(A' + A\frac{N'}{N}\right) + r^2 + k(A-1)\right]\psi'' + krA\left[A'' + A\frac{N''}{N} + \frac{5N'}{2N}A' - A\frac{N'^2}{2N}\right]\psi' + \left[(r^2 + 3kA - k)A' + (r^2 + 3kA - k)A\frac{N'}{2N}\right]\psi' + [krA'^2 + 2rA]\psi' = r^2V_\psi \qquad 10$$

حالت خاص N(r)=1

با انتخاب متریک6 به‌عنوان متریک پس‌زمینه برای حالت خاص N(r)=1 معادلات7 تا 10 را می‌توانیم با کمی عملیات جبری به‌صورت زیر باز نویسی کنیم

$$k\left[A\left(\frac{\psi'^2}{r}\right)' + \frac{\psi'^2}{r^2}\right] = \epsilon\psi'^2 \qquad 11$$

معادلهٔ11 با حذف پتانسیل بین معادلات7 و 8 حاصل می‌شود،

$$\left(A' r^2\right)' = -16\pi r^2 V + 4\pi k\left(AA' r^2 \psi'^2\right) + 8\pi k \psi'^2 (AA' r + A^2 - A) \quad 12$$

$$2A - A'' r^2 = 2 + 4\pi k[\psi'^2 (2A^2 r - AA' r^2)]' + 8\pi k A \psi'^2 \quad 13$$

$$\frac{d}{dr}[(\epsilon A r^2 + kA(A'r + a - 1))\psi' = r^2 V_\psi \quad 14$$

علامت پریم در روابط بالا به‌معنی مشتق گیری نسبت به مختصهٔ شعاعی است. اگر میدان اسکالر را میدانی جرم‌دار لحاظ کنیم و پتانسیل را مثبت در نظر بگیریم، $V^2 = \mu\psi$، (انتخاب پتانسیل منفی منجر به ناپایداری می‌شود چرا که با انتخاب جرم مربعی منفی، پتانسیل به‌جای کمینه دارای ماکزیمم موضعی می‌شود و لذا انرژی حد کمینه نخواهد داشت)

در فواصل دور $r \gg r_s$ ، رابطهٔ14 به‌صورت

$$\psi'' + \frac{2}{r}\psi' - \mu^2\psi = 0 \quad 15$$

تبدیل می‌شود که پاسخ آن به‌صورت زیر است:

$$\psi(r) = B.\frac{1}{\mu r}e^{\mu r} + C.\frac{1}{\mu r}e^{-\mu r} \quad 16$$

برای آنکه رفتار مجانبی این پاسخ خوش تعریف باشد ضریب B را برابر صفر قرار می‌دهیم و در نتیجه عبارت [11]:

$$\lim_{r\to\infty}\psi(r) = 0 \quad 17$$

برقرار می‌گردد. همچنین برای ستارهٔ بازتابی با شرایط مرزی دریکله یا نویمان خواهیم داشت:

$$Dirichlet: \psi(r_s) = 0$$

$$Neumann: \psi'(r_s) = 0$$

برای حالت خاص N(r)=1 و با توجه به فرم تابعی A(r) معادلهٔ14 را می‌توانیم به‌صورت

$$\frac{d}{dr}(\epsilon A r^2 \psi') = 2r^2 V_\psi = 4\mu^2 r\psi$$

بازنویسی می‌کنیم. در ادامه مسئله را برای پتانسیل دلخواه V(ψ) مورد مطالعه قرار می‌دهیم. با ضرب کردن طرفین رابطهٔ بالا در یک میدان اسکالر ψ خواهیم داشت:

$$\int_{r_s}^{\infty}\psi d(\epsilon A r^2 \psi') = \int_{r_s}^{\infty} 2r^2 V_\psi \psi dr$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به‌جزء، رابطهٔ زیر حاصل می‌شود

$$(\epsilon A r^2 \psi\psi')_{r_s}^{\infty} = \int_{r_s}^{\infty} r^2(\epsilon A\psi'^2 + 2V_\psi\psi)dr \quad 18$$

با فرض $V_\psi\psi > 0$ سمت راست رابطهٔ بالا عبارتی همواره مثبت است حال آنکه سمت چپ این رابطه با توجه به شرایط مرزی ذکر شده (دریکله و نویمان) و همچنین با فرض رفتار مجانبی میدان ($\psi \sim \frac{1}{r}$)، صفر است. بنابراین رابطهٔ20 با فرض $V_\psi\psi > 0$ تنها در صورتی می‌تواند برقرار باشد که مقدار میدان اسکالر در همه جا برابر با صفر باشد و لذا برای این حالت موی اسکالر نداریم.

بررسی حالت کلی N=N(r)

معادلات7 تا 10 را در حضور یک ستارهٔ بازتابی بررسی می‌کنیم. برای این منظور ابتدا شرط مرزی نویمان را برای سطح مرزی در نظر می‌گیریم. با اعمال این شرط مرزی به رابطهٔ7 و نتایج آن به رابطهٔ8 خواهیم داشت:

$$\psi'(r_s) = 0 \Rightarrow V(\psi)_{r_s} = 0$$

$$V(\psi)_{r_s} = 0, \psi'(r_s) = 0 \Rightarrow N'(r_s) = 0$$

همچنین از اعمال این نتایج به رابطهٔ9 خواهیم داشت:

$$V(\psi)_{r_s} = 0, \psi'(r_s) = 0, N'(r_s) = 0 \Rightarrow N''(r_s) = 0$$

با اعمال این نتایج به مشتق رابطهٔ اول خواهیم دید که مشتق دوم میدان اسکالر نیز روی سطح بازتابی برابر با صفر می‌شود. با دنبال کردن همین روال و با اعمال نتایج بالا به مشتقات مراتب بالاتر روابط 7 الی 10 خواهیم داشت:

$$\left(\frac{d^n\psi(r)}{dr^n}\right)_{r_s} = 0, \quad n= 0, 1, 2, \ldots \qquad 19$$

$$\left(\frac{d^nN(r)}{dr^n}\right)_{r_s} = 0, \quad n= 0, 1, 2, \ldots \qquad 20$$

بنابراین می‌بینیم که برای شرط مرزی نویمان تمام ضرایب بسط میدان اسکالر اطراف سطح بازتابی برابر با صفر می‌شود و لذا تنها پاسخ معادلهٔ میدان اسکالر20 برای این شرط مرزی، پاسخ بدیهی خواهد بود.

برای شرط مرزی دریکله از قضیهٔ رول در حسابان استفاده می‌کنیم. طبق این قضیه با توجه به صفر بودن مقدار میدان روی سطح بازتابی و همچنین در بی‌نهایت، اگر معادلهٔ میدان جواب غیر بدیهی داشته باشد آنگاه حتماً یک نقطه به‌نام r_p در فاصلهٔ بین سطح بازتابی و بی‌نهایت وجود دارد که در آن خواهیم داشت:

$$\psi \neq 0, \qquad \psi' = 0, \quad \psi\psi'' < 0$$

حال با توجه به صفر بودن مشتق میدان اسکالر در این نقطه می‌توانیم تمام مراحل صورت گرفته برای شرط مرزی نویمان را برای شرط مرزی دریکله نیز به کار ببریم. تنها تفاوت در این مرحله این است که اکنون محاسبات را در اطراف نقطهٔ r_p انجام می‌دهیم و بنابراین روابط19 و 20 در اینجا نیز صادق هستند. بنابراین برای شرط مرزی دریکله نیز تنها پاسخ معادلهٔ18 پاسخ بدیهی می‌باشد.

بحث و نتیجه‌گیری

با توجه به محاسبات انجام شده در قسمت‌های قبل می‌توان این‌گونه نتیجه‌گیری کرد که برای یک مدل گرانشی ناشی از جفت‌شدگی غیر کمینهٔ مشتق میدان اسکالر با تانسور خمش و با پتانسیل $V(\psi)$ که شرط $V_\psi\psi > 0$ روی مشتق آن برقرار است و همچنین با انتخاب متریک6 به‌عنوان متریک پس زمینه، در یک فضای مجانبی تخت با تقارن کروی و در مجاورت یک ستارهٔ بازتابی موی اسکالر مشاهده نمی‌شود. این مسئله را با درنظر گرفتن پتانسیل اسکالر مربعی، برای متریک کلی‌تری که در آن جرم ظاهر شده درون متریک تابع مختصهٔ شعاعی نیز می‌باشد مورد مطالعه قرار گرفت که نتایج این مطالعه در [17] به چاپ رسیده است. در آنجا نشان داده شده که نمی‌توانیم به صراحت بی‌مویی را در حالت کلی به اثبات برسانیم اما تحت شرایط خاصی که در اینجا بررسی کردیم بی‌مویی تأیید می‌شود.

در پایان لازم به تذکر است که این مسئله برای سیاه چالهٔ چرخان بررسی نشده است و لذا می‌توانیم این کار را به خوانندهٔ مشتاق پیشنهاد کنیم.

مرجع‌ها

[1] R. Ruffini, J.A.Wheeler, Introducing the black hole, *Physics Today*. **24** (1971) 30. https://doi.org/10.1063/1.3022513

[2] C.A.R. Herdeiro, E. Radu, Asymptotically flat black holes with scalar hair a review, *arXiv:1504.08209 [gr-qc]*.

[3] J.D. Bekenstein, Transcendence of the Law of Baryon-Number Conservation in Black-Hole Physics, *Physical Review Letters* **28** (1972) 452. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.28.452

[4] J.D. Bekenstein, Black hole Thermodynamics, *Physics Today* **33** (1980) 24. https://doi.org/10.1063/1.2913906

[5] S. Hod, Stationary scalar clouds around rotating black holes, *Physical Review D* **86** (2012) 104026. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.104026

[6] S. Hod, Stationary resonances of rapidly-rotating Kerr black holes, *European Physical Journal* C **73** (2013) 2378. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-013-2378-x

[7] C.A.R. Herdeiro, E. Radu, Kerr Black Holes with Scalar Hair, *Physical Review Letters* **112** (2014) 221101. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.221101

[8] S. Hod, No nonminimally coupled massless scalar hair for spherically symmetric neutral reflecting stars, *Phys. Rev. D* **96** (2017) 024019. https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.08.033

[9] S. Hod. Charged massive scalar field configurations supported by a spherically symmetric charged reflecting shell, *Physics Letters B* **763** (2016) 275. https://doi.org/10.1016/j.physletb.2016.10.069

[10] S. Hod, The superradiant instability regime of the spinning Kerr black hole,

Physics Letters B **758** (2016) 181-185. https://doi.org/10.1016/j.physletb.2016.05.012

[11] S. Hod. No hair for spherically symmetric neutral reflecting stars, *Physics Letters B* **773** (2017) 208-212. https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.08.033

[12] S. Hod, No-scalar-hair theorem for spherically symmetric reflecting stars, *Physical Review D* **94** (2016) 104073. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.104073

[13] C. Germani, A. Kehagias, New Model of Inflation with Non-minimal Derivative Coupling of Standard Model Higgs Boson to Gravity *Physical Review Letters* **105** (2010) 011302. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.28.452

[14] H.M. Sadjadi, P. Goodarzi. Reheating temperature in non-minimal derivative coupling model, *JCAP* **07** (2013) 039. https://doi.org/10.1088/1475-7516/2013/07/039

[15] H.M. Sadjadi, P. Goodarzi, Oscillatory inflation in non-minimal derivative coupling model, *Physics Letters B* **732** (2014) 278. https://doi.org/10.1016/j.physletb.2014.03.050

coupling model for Neumann and Dirichlet reflecting star, *Physics Letters B* **799** (2019) 135031.
https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.135031

[16] M. Khodaei, H. Mohseni Sadjadi, No Skyrmion hair for stationary asymptotic flat reflecting star, *Physics Letters B* **797** (2019) 134922.
https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.134922

[17] H. Mohseni Sadjadi, M. Khodaei, No scalar hair in nonminimal derivative