The effect of variations of dimensions of a coaxial to WG1800 waveguide coupler on its frequency

Maryam Mostajeran* , Ali Mohammad Nikdoust

Department of Physics, University of Yazd, Yazd, Iran

Received: 17.04.2019 Final revised: 21.04.2020 Accepted: 09.05.2020

Doi: 10.22055/JRMBS.2020.15562

Abstract

The fabrication tolerances for a coaxial to WG1800 waveguide coupler cause the variations of its electromagnetic parameter such as the working frequency. In order to investigate the effect of these uncertainty on the electromagnetic parameters, Monte Carlo method is usually used, which is very time consuming. In this paper, the generalized Polynomial Chaos (gPC) method is first used for study the effect of variations of dimensions of a WR187 rectangular cavity on the resonant frequency. To assessment the accuracy of this method, these results are compared with the Monte Carlo and the theory methods. In the second step, the effect of variations of dimensions of a coaxial to WG1800 waveguide coupler on its frequency is investigated using the gPC Method.

.

Keywords: Fabrication tolerances, Variations, Monte Carlo, generalized Polynomial Chaos, frequency

* Corresponding Author: mostajeran@yazd.ac.ir

اثر تغییرات ابعاد کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 روی فرکانس

مریم مستأجران*، علی محمد نیک‌دوست

دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران

دریافت: 1398/01/28 ویرایش نهائی: 1399/02/02 پذیرش: 1399/02/20

Doi: 10.22055/JRMBS.2020.15562

چکیده

خطای ساخت در کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800، باعث تغییر پارامترهای الکترومغناطیسی آن مانند فرکانس کار می‌شود. برای بررسی اثر این تغییرات، معمولاً از روش مونت‌کارلو استفاده می‌شود که بسیار زمان‌بر است. در این مقاله با استفاده از روش چند جمله‌ای آشوب تعمیم یافته، ابتدا اثر تغییرات ابعاد کاواک مستطیلی WR187 در فرکانس تشدیدی توضیح داده می‌شود. برای ارزیابی دقت این روش، نتایج حاصل، با نتایج روش تئوری و مونت‌کارلو مقایسه می‌شود. سپس با استفاده از روش چند جمله‌ای آشوب تعمیم یافته اثر تغییرات ابعاد کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 روی فرکانس بررسی می‌شود.

کلیدواژگان: خطای ساخت، تغییرات، مونت‌کارلو، چند جمله‌ای آشوب تعمیم یافته، فرکانس

مقدمه

در فیزیک شتاب‌دهنده‌ها، محاسبۀ پارامترهای الکترومغناطیسی ساختارهای رادیو فرکانسی (RF[1]) مانند موجبرها، کوپلرها و کاواک‌ها بسیار اهمیت دارند. فرکانس قطع و فرکانس تشدیدی، از جمله پارامترهای الکترومغناطیسی به‌ترتیب برای موجبرها و کاواک‌ها هستند. این پارامترها به هندسۀ ساختارهای RF بستگی دارند. در دنیای واقعی، ابعاد ساختارهای RF به‌علت خطاهای ساخت تغییر می‌کنند، لذا در طراحی ساختارهای RF باید اثر تغییرات ابعاد در محاسبۀ پارامترهای الکترومغناطیسی بررسی شود. برای مطالعۀ اثر تغییرات ابعاد معمولاً از روش مونت‌کارلو[2] استفاده می‌شود. در این روش برای افزایش دقت نتایج باید نمونۀ[3] مورد نظر به تعداد نسبتاً زیادی اجرا شود، لذا این روش بسیار زمان‌بر است. به‌منظور کاهش زمان اجرای شبیه‌سازی می‌توان روش چند جمله‌ای آشوب تعمیم یافته (gPC[4]) را پیشنهاد داد [1]. اثر تغییرات ابعاد (عدم اطمینان در ابعاد) کاواک مورد استفاده در شتاب‌دهندۀ FLASH در DESY، بر فرکانس تشدیدی آن با استفاده از روش gPC بررسی شده است [2]. نتایج نشان می‌دهد تغییرات کدامیک از ابعاد اثر بیشتری بر فرکانس تشدیدی دارد. اثر عدم اطمینان در ابعاد کاواک میانه در کاواک ابررسانای TESLA بر ویژگی‌های آن (فاکتور کیفیت، شانت امپدانس و فرکانس تشدیدی) با استفاده از روش gPC انجام شده

* نویسنده مسئول: mostajeran@yazd.ac.ir

[1] Radio Frequency
[2] Monte Carlo
[3] Sample
[4] generalized Polynomial Chaos

است [3-4]. نتایج حاصل از این روش با نتایج حاصل از روش مونت‌کارلو تطابق خوبی داشته است.

در این مقاله، روش gPC ابتدا برای بررسی اثر تغییرات ابعاد کاواک مستطیلی بر فرکانس تشدیدی، با استفاده از نرم‌افزار شبیه‌سازی CST[1] و برنامه‌نویسی پایتون انجام می‌شود. برای ارزیابی دقت روش gPC، نتایج حاصل از این روش را با نتایج حاصل از روش تئوری و مونت‌کارلو مقایسه می‌کنیم. سپس، اثر تغییرات ابعاد کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 بر فرکانس کار آن را با استفاده از روش gPC، بررسی می‌کنیم.

ساختارهای رادیو فرکانسی

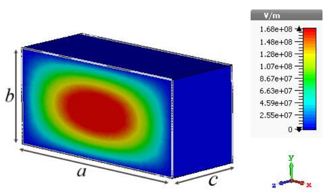
کاواک مستطیلی WR187

کاواک‌های تشدیدی مستطیلی بر اساس ابعاد و محدودهٔ فرکانسی به دو دستهٔ WR و WG تقسیم‌بندی می‌شوند. کاواک‌های WR در محدودهٔ فرکانسی گیگاهرتز و کاواک‌های WG در محدودهٔ فرکانسی مگاهرتز کار می‌کنند. فرکانس تشدیدی، فرکانسی است که در آن کاواک می‌تواند یک نوسان آزاد را تقویت کند. برای یک کاواک مستطیلی فرکانس تشدیدی با استفاده از رابطهٔ 1 محاسبه می‌شود [5].

$$f_{mnl}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{l\pi}{c}\right)^2} \qquad 1$$

در اینجا، ε ضریب گذردهی الکتریکی محیط، μ ضریب تراوایی مغناطیسی محیط، m و n و l ثابت‌های جداسازی مربوط به مد و a و b و c پارامترهای مربوط به ابعاد کاواک مستطیلی هستند. اگر $a>b>c$ باشد مُد تشدیدی غالب کاواک، مُد TM_{110} است. الگوی میدان الکتریکی مربوط به مُد TM_{110} در شکل 1 نشان داده شده است.

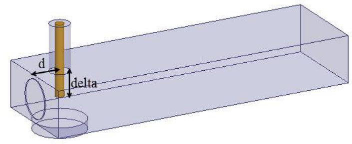
کاواک تشدیدی مورد نظر، کاواکی با ابعاد $a=4{,}755$ cm (a=187 inch)، $b=2{,}215$ cm و $c=2$ cm با فرکانس تشدیدی $7{,}4655\,GHz$ است که به کاواک WR187 معروف است [5]. در این مقاله ابتدا می‌خواهیم، تأثیر تغییرات پارامتر a و b بر فرکانس تشدیدی را بررسی کنیم.



شکل 1. الگوی میدان الکتریکی مربوط به مُد TM_{110} [6].

کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800

در شتاب‌دهنده‌های ذرات، کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 اتصال‌دهندهٔ موجبر به کاواک شتابدهی است. امواج رادیو فرکانسی تولید شده توسط کلایسترون[2] وارد موجبر شده و سپس از طریق کوپلر وارد ساختار شتاب‌دهی می‌شوند. کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 در شتاب‌دهندهٔ KEKB ژاپن مورد استفاده قرار می‌گیرد و در فرکانس 500 مگاهرتز کار می‌کند [7]. در شکل 2، شماتیک کوپلر کواکسیال به‌موجبر WG1800 که به‌وسیلهٔ نرم‌افزار شبیه‌سازی CST طراحی شده است، نشان داده می‌شود [8].



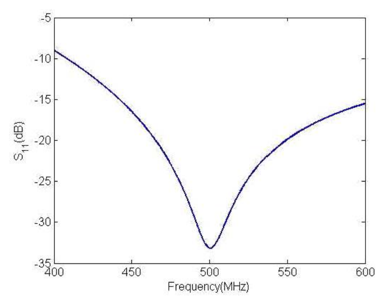
شکل 2. شماتیک کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 [8].

در شکل 2 مقدار ورود کواکسیال به‌داخل موجبر، delta و فاصلهٔ کواکسیال تا موجبر، d است.

[1] CST STUDIO SUITE

[2] Klystron

ماتریس پراکندگی، S، دارای درایه‌هایی است که توان‌های تابیده شده و انعکاس یافته از پورت‌ها که منبع توان سیستم هستند را به‌یکدیگر مربوط می‌کنند. به‌عنوان مثال S_{11} توان بازگشتی به پورت یک است (در شکل2 پورت یک، ورودی کواکسیال در نظر گرفته شده است). در طراحی ابزارهای الکترومغناطیسی هدف، کمینه کردن S_{11} است. در شکل3 پارامتر پراکندگی S_{11} برحسب فرکانس برای کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 نشان داده شده است [8]، که در فرکانس کار[1] (500 مگاهرتز) مقدار کمینه S_{11} را دارد. اگر پهنای باند این کوپلر را محدودهٔ فرکانسی که پارامتر پراکندگی آن کمتر از $-30\,dB$ است در نظر بگیریم، این کوپلر می‌تواند در باند فرکانسی 487 تا 516 مگاهرتز مورد استفاده قرار بگیرد. برای بررسی اثر تغییرات پارامتر d و $delta$ بر فرکانس کار از روش gPC استفاده می‌کنیم.



شکل3. نمودار پارامتر پراکندگی S_{11} برحسب فرکانس [8].

روش چند جمله‌ای آشوب تعمیم‌یافته (gPC)

روش gPC، اولین بار توسط قانم[2] و اسپانوس[3] مطرح شد. اگر به‌ازای برخی متغیرهای ورودی $\vec{\xi}$ مقدار تابع $f(\vec{\xi})$ مشخص باشد، برای به‌دست آوردن تابع $f(\vec{\xi})$ می‌توان از روش gPC استفاده کرد [9].

در این روش یک تابع برحسب چند جمله‌ای‌های متعامد بسط داده می‌شود. با فرض اینکه متغیرهای ورودی تابع $\vec{\xi}=(\xi_1,...,\xi_M)$ دارای توزیع تصادفی یکنواخت در بازهٔ $[-1,1]$ باشند، تابع $f(\vec{\xi})$ با استفاده از بسط چند جمله‌ای‌های متعامد لژاندر از رابطهٔ2 به‌دست می‌آید [10].

$$f(\vec{\xi})=\sum_{\alpha\in\chi(M,N)} c_\alpha \mathbf{P}_\alpha(\vec{\xi}), \qquad 2$$

در اینجا، M تعداد متغیرها، N مرتبهٔ بسط، α شاخص چند بُعدی، c_α ضرایب بسط و $\mathbf{P}_\alpha(\vec{\xi})$ چند جمله‌ای پایهٔ لژاندر چند متغیره است. $\mathbf{P}_\alpha(\vec{\xi})$ برابر با حاصل‌ضرب چند جمله‌ای‌های لژاندر تک متغیره است. حالت‌های مختلف شاخص $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_M)$، با استفاده از شرط $\chi(M,N)=\left\{\alpha\in\mathbb{N}^M:\sum_{i=1}^{M}\alpha_i\le N\right\}$ تشکیل می‌شوند. با محاسبهٔ ضرایب بسط از رابطهٔ3، تابع $f(\vec{\xi})$ تعیین می‌شود.

$$c_\alpha=\frac{\mathrm{E}\left[f(\vec{\xi})\mathbf{P}_\alpha(\vec{\xi})\right]}{\mathrm{E}\left[\mathbf{P}_\alpha(\vec{\xi})\mathbf{P}_\alpha(\vec{\xi})\right]} =\frac{1}{\gamma_\alpha}\int_{-1}^{1}...\int_{-1}^{1} f(\vec{\xi})\mathbf{P}_\alpha(\vec{\xi})\rho(\vec{\xi})d\vec{\xi}, \qquad 3$$

در اینجا، E نماد میانگین، $\gamma_\alpha=(\frac{2}{2\alpha_1+1})...(\frac{2}{2\alpha_M+1})$ و $\rho(\vec{\xi})$ تابع چگالی احتمال متغیرها است. $\rho(\vec{\xi})$ برابر با $\rho(\xi_1)...\rho(\xi_M)$ است. مقادیر $f(\vec{\xi})$ به‌ازای متغیرهای ورودی $(t_1,...,t_M)$ که در ادامه به‌عنوان گره‌ها[4] معرفی می‌شوند، مشخص است. با محاسبهٔ انتگرال رابطه‌ی3

[1] Working Frequency
[2] Ghanem
[3] Spanos
[4] Nodes

به‌روش کلینشو کورتیز[1] [11]، ضرایب بسط از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شوند.

$$c_\alpha = \frac{1}{\gamma_\alpha}\sum_{i_1=1}^{n}\dots\sum_{i_M=1}^{n} \mathrm{f}(t_{1,i_1},\dots,t_{M,i_M})P_{\alpha_1}(t_{1,i_1})\dots P_{\alpha_M}(t_{M,i_M}) \quad 4$$

$$w(t_{1,i_1})\dots w(t_{M,i_M}).$$

که $(t_{1,i_1},\dots,t_{M,i_M})$ گره‌های روش کلینشو کورتیز [12]، $\mathrm{f}(t_{1,i_1},\dots,t_{M,i_M})$ مقدار تابع به‌دست آمده از جایگذاری گره‌ها به‌عنوان متغیرهای ورودی، $P_{\alpha_1}(t_{1,i_1})\dots P_{\alpha_M}(t_{M,i_M})$ حاصل ضرب چند جمله‌ای‌های لژاندر با جایگذاری گره‌ها به‌عنوان متغیر ورودی، $w(t_{1,i_1})\dots w(t_{M,i_M})$ حاصل‌ضرب تابع وزن[2] متناظر با گره‌ها و n تعداد گره‌ها هستند. نحوهٔ محاسبهٔ گره‌ها و تابع وزن به‌روش کلینشو کورتیز در [12] توضیح داده شده است. برای $N \geq 1$ تعداد گره‌ها از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$n = 2^N + 1 \quad 5$$

در حالت کلی، تابع $\mathrm{f}(\vec{X})$ دارای M متغیر $X_1,\dots,X_M$ است به‌طوری‌که هر یک از متغیرها دارای توزیع تصادفی در بازهٔ $[a_i,b_i]$ هستند، برای بسط این تابع برحسب چند جمله‌ای لژاندر باید متغیر ورودی آن را بر اساس بازهٔ $[-1,1]$ تبدیل کرد. برای تبدیل کردن متغیر X_i برحسب گره‌های t_i از رابطهٔ6 استفاده می‌شود [13].

$$X_i(t_i) = \frac{b_i - a_i}{2}t_i + \frac{b_i + a_i}{2}. \quad 6$$

با استفاده از تابع تبدیل یافته، ضرایب بسط از رابطهٔ7 به‌دست می‌آید.

$$c_\alpha = \frac{1}{\gamma_\alpha}\sum_{i_1=1}^{n}\dots\sum_{i_M=1}^{n} \mathrm{f}(X_1(t_{1,i_1}),\dots,X_M(t_{M,i_M})) \quad 7$$

$$P_{\alpha_1}(t_{1,i_1})\dots P_{\alpha_M}(t_{M,i_M})w(t_{1,i_1})\dots w(t_{M,i_M}).$$

پس از تعیین ضرایب و مشخص شدن تابع $\mathrm{f}(\vec{X})$، برای $\mathcal{N}$ نمونهٔ تصادفی $\vec{X}$، $\mathcal{N}$ مقدار $\mathrm{f}(\vec{X})$ حاصل می‌شود که دارای توزیع تصافی، تابع چگالی احتمال[3] (PDF)، است. با برآورد کردن (فیت کردن) تابع بر داده‌های به‌دست آمده، PDF به‌دست می‌آید. در این مقاله از برآوردگر کرنل[4] در MATLAB برای محاسبهٔ PDF استفاده می‌شود [14]. در روش gPC برای انتخاب مرتبهٔ بسط مناسب، باید خطای نسبی تابع را محاسبه کرد. برای محاسبهٔ خطای نسبی تابع از رابطهٔ8 استفاده می‌شود.

$$Error = \mathrm{E}\left[\left|\frac{\mathrm{f}_T(\vec{\xi}) - \mathrm{f}_N(\vec{\xi})}{\mathrm{f}_T(\vec{\xi})}\right|\right], \quad 8$$

که $\mathrm{f}_T(\vec{\xi})$ مقدار واقعی تابع و $\mathrm{f}_N(\vec{\xi})$ مقدار تابع از روش شبیه‌سازی (روش gPC در مرتبهٔ بسط N) است. برای مواردی که مقادیر $\mathrm{f}_T(\vec{\xi})$ معلوم نیست از روش تخمین خطای پسین[5] استفاده می‌شود. روش تخمین خطای پسین اولین بار توسط نوبایل[6] مطرح شد [15]. در این روش، به‌جای تابع $\mathrm{f}_T(\vec{\xi})$ مقدار تابع از روش gPC به‌ازای یک مرتبهٔ بسط بالاتر ($\mathrm{f}_{N+1}(\vec{\xi})$) در نظر گرفته شده و خطای نسبی تابع از رابطهٔ9 به‌دست می‌آید.

$$Error = \mathrm{E}\left[\frac{\left|\sum_{\alpha\in\chi(M,N+1)} c_\alpha \mathbf{P}_\alpha(\vec{\xi}) - \sum_{\alpha\in\chi(M,N)} c_\alpha \mathbf{P}_\alpha(\vec{\xi})\right|}{\left|\sum_{\alpha\in\chi(M,N+1)} c_\alpha \mathbf{P}_\alpha(\vec{\xi})\right|}\right]. \quad 9$$

[1] Clenshaw-curtis
[2] Weight
[3] Probability Density Function
[4] Kernel
[5] Posteriori Error
[6] Nobile

خطای مرتبهٔ $(N+1)$ در روش gPC، علاوه بر رابطهٔ9 می‌توان برحسب خطای ضرایب بسط[1] هم محاسبه کرد (رابطهٔ10). اثبات آن در پیوست (الف) آورده شده است.

$$Error=\frac{\left\|\vec{C}^{(N+1)}-\vec{C}^{(N)}\right\|}{\left\|\vec{C}^{(N+1)}\right\|}. \quad 10$$

که $\vec{C}^{(N+1)}$ ضرایب بسط مرتبهٔ $N+1$ و $\vec{C}^{(N)}$ ضرایب بسط مرتبهٔ N هستند.

شاخص سابُل

شاخص‌های سابُل[2]، میزان تأثیر هر یک از متغیرهای ورودی و برهم‌کنش متغیرها را در خروجی تابع نشان می‌دهد [16]. به‌طور مثال، تابع دو متغیرهٔ $\mathrm{f}\left(\vec{\xi}\right)$ را در نظر بگیرید. برای مرتبهٔ $N=3$ حالت‌های مختلف شاخص α براساس $\chi(2,3)=\left\{\alpha\in\mathbb{N}^2:(\alpha_1+\alpha_2)\leq 3\right\}$ به‌صورت $(0,0)$، $(0,1)$، $(0,2)$، $(0,3)$، $(1,0)$، $(1,1)$، $(1,2)$، $(2,0)$، $(2,1)$ و $(3,0)$ تشکیل می‌شوند. با توجه به‌رابطهٔ2، تابع $\mathrm{f}\left(\vec{\xi}\right)$ بسط داده می‌شود، رابطهٔ11.

$$\begin{aligned}\mathrm{f}\left(\vec{\xi}\right)&=c_{0,0}\mathbf{P}_{0,0}\left(\vec{\xi}\right)+c_{0,1}\mathbf{P}_{0,1}\left(\vec{\xi}\right)+c_{0,2}\mathbf{P}_{0,2}\left(\vec{\xi}\right)+c_{0,3}\mathbf{P}_{0,3}\left(\vec{\xi}\right)\\&+c_{1,0}\mathbf{P}_{1,0}\left(\vec{\xi}\right)+c_{1,1}\mathbf{P}_{1,1}\left(\vec{\xi}\right)+c_{1,2}\mathbf{P}_{1,2}\left(\vec{\xi}\right)\\&+c_{2,0}\mathbf{P}_{2,0}\left(\vec{\xi}\right)+c_{2,1}\mathbf{P}_{2,1}\left(\vec{\xi}\right)+c_{3,0}\mathbf{P}_{3,0}\left(\vec{\xi}\right)\end{aligned} \quad 11$$

رابطهٔ11 را می‌توان به‌صورت رابطهٔ12 نوشت که اثبات آن در پیوست ب آورده شده است.

$$\begin{aligned}\mathrm{f}\left(\vec{\xi}\right)&=c_{0,0}+\sum_{i=1}^{M=2}\sum_{\alpha\in\chi(1,3)}c_\alpha\mathbf{P}_\alpha(\xi_i)\\&+\sum_{i=1}^{M=2}\sum_{\substack{j=1\\j>i}}^{M=2}\sum_{\alpha\in\chi(2,3)}c_\alpha\mathbf{P}_\alpha(\xi_i,\xi_j)\end{aligned} \quad 12$$

در اینجا، $\mathbf{P}_\alpha(\xi_i)$ چند جمله‌ای پایه لژاندر تک متغیره، $\mathbf{P}_\alpha(\xi_i,\xi_j)$ چند جمله‌ای پایه لژاندر دو متغیره هستند.

با توجه به رابطهٔ12، تابع M متغیرهٔ $\mathrm{f}\left(\vec{\xi}\right)$ را می‌توان به‌صورت توابع تک متغیره، دو متغیره و چند متغیره تفکیک کرد، (رابطهٔ13).

$$\begin{aligned}\mathrm{f}\left(\vec{\xi}\right)&=c_{0,\dots,0}+\sum_{i=1}^{M}\sum_{\alpha\in\chi(1,N)}c_\alpha\mathbf{P}_\alpha(\xi_i)\\&+\sum_{i=1}^{M}\sum_{\substack{j=1\\j>i}}^{M}\sum_{\alpha\in\chi(2,N)}c_\alpha\mathbf{P}_\alpha(\xi_i,\xi_j)+\dots+\\&\sum_{i=1}^{M}\dots\sum_{\substack{k=1\\k>\dots>i}}^{M}\sum_{\alpha\in\chi(M,N)}c_\alpha\mathbf{P}_\alpha(\xi_i,\dots,\xi_k)\end{aligned} \quad 13$$

در اینجا، با تعریف $\mathrm{f}_0=c_{0,\dots,0}$، $\mathrm{f}_i(\xi_i)=\sum_{\alpha\in\chi(1,N)}c_\alpha\mathbf{P}_\alpha(\xi_i)$، $\mathrm{f}_{i,j}(\xi_i,\xi_j)=\sum_{\alpha\in\chi(2,N)}c_\alpha\mathbf{P}_\alpha(\xi_i,\xi_j)$ و $\mathrm{f}_{i,\dots,k}(\xi_i,\dots,\xi_k)=\sum_{\alpha\in\chi(M,N)}c_\alpha\mathbf{P}_\alpha(\xi_i,\dots,\xi_k)$، رابطهٔ13 را می‌توان به‌صورت رابطهٔ14 نوشت [17].

$$\begin{aligned}\mathrm{f}\left(\vec{\xi}\right)&=\mathrm{f}_0+\sum_{i=1}^{M}\mathrm{f}_i\left(\xi_i\right)+\sum_{i=1}^{M}\sum_{\substack{j=1\\j>i}}^{M}\mathrm{f}_{i,j}\left(\xi_i,\xi_j\right)\\&+\dots+\sum_{i=1}^{M}\dots\sum_{\substack{k=1\\k>\dots>i}}^{M}\mathrm{f}_{i,\dots,k}(\xi_i,\dots,\xi_k)\end{aligned} \quad 14$$

شاخص سابُل مرتبهٔ اول برای هر متغیر، برابر با نسبت واریانس مربوط به‌همان متغیر به واریانس مربوط به کل متغیرها است. برای تابع M متغیرهٔ $\mathrm{f}\left(\vec{\xi}\right)$ سابُل مرتبهٔ اول برحسب متغیر ξ_i، S_i، با استفاده از رابطهٔ15 به‌دست می‌آید [17].

$$S_i=\frac{\mathrm{V}_i}{\mathrm{V}}=\frac{\mathrm{V}_{\xi_i}\left[\mathrm{E}\left[\mathrm{f}\left(\vec{\xi}\right)|\xi_i\right]\right]}{\mathrm{V}\left[\mathrm{f}\left(\vec{\xi}\right)\right]},\quad 1\leq i\leq M \quad 15$$

در اینجا، V نماد واریانس و $\mathrm{E}\left[\mathrm{f}\left(\vec{\xi}\right)|\xi_i\right]$ نماد میانگین‌گیری از تابع $\mathrm{f}\left(\vec{\xi}\right)$ با ثابت در نظر گرفتن ξ_i است. سابُل مرتبهٔ دوم، $S_{i,j}$، میزان تأثیر برهم‌کنش متغیر ξ_i و ξ_j در خروجی تابع را نشان می‌دهد که از رابطهٔ16 به‌دست می‌آید [18].

---

[1] Coefficient Error

[2] Sobol Indices

$$S_{i,j} = \frac{\mathrm{V}_{\xi_i,\xi_j}\left[\mathrm{E}\left[\mathrm{f}\left(\vec{\xi}\right) \mid \xi_i, \xi_j\right]\right]}{\mathrm{V}\left[\mathrm{f}\left(\vec{\xi}\right)\right]} - S_i - S_j, \quad 1 \le i < j \le M \tag{16}$$

در اینجا، $\mathrm{E}\left[\mathrm{f}\left(\vec{\xi}\right) \mid \xi_i, \xi_j\right]$ نماد میانگین‌گیری از تابع $\mathrm{f}\left(\vec{\xi}\right)$ با ثابت در نظر گرفتن ξ_i و ξ_j است. رابطهٔ17 برای سابُل کل برقرار است [19].

$$S^{Total} = \sum_{i=1}^{M} S_i + \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{M} S_{i,j} + \ldots + \sum_{i=1}^{M} \ldots \sum_{\substack{k=1 \\ k>\ldots>i}}^{M} S_{\mathrm{i,\ldots,k}} = 1 \tag{17}$$

در اینجا، M تعداد متغیرها و $S_{\mathrm{i,\ldots,k}}$ شاخص سابُل مرتبهٔ M است.

کنترل نرم‌افزار CST با استفاده از برنامه پایتون

در روش gPC، باید مدل طراحی شده در نرم‌افزار CST به تعداد گره‌ها اجرا شود و تابع خروجی به‌ازای گره‌ها محاسبه شود. به‌این منظور، نرم‌افزار شبیه‌سازی CST را با استفاده از برنامهٔ پایتون کنترل می‌کنیم تا به‌طور خودکار اجرا شود. نرم‌افزار CST بر اساس زبان برنامه‌نویسی VBA [1] ساخته شده است. به‌طور کلی برای کنترل نرم‌افزار CST توسط پایتون به چندین فایل با پسوند مختلف (فایل با پسوند CST حاوی مدل طراحی شده، فایل با پسوند bas شامل دستورات VBA، فایل با پسوند txt شامل مقادیر پارامترها و فایل با پسوند py شامل دستورات پایتون) نیاز است.

مراحل کنترل نرم‌افزار شبیه‌سازی CST با استفاده از برنامهٔ پایتون عبارتند از:

I. مدل مورد نظر (به‌عنوان مثال، کاواک WR187 و یا کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800) در نرم‌افزار CST شبیه‌سازی و ذخیره می‌شود.

II. پارامترهای تعیین شده در طراحی مدل، توسط برنامه‌ای برای ورود به فایل bas در فایل متنی چاپ می‌شود. به‌طور مثال، مقادیر پارامتر X و Y با استفاده از دستور زیر در محیط پایتون در فایل structure.txt چاپ می‌شود.

```
with open ('structure.txt','w') as f:
     f.write('%f \n' % X)
     f.write('%f \n' % Y)
f.close()
```

III. نرم‌افزار CST حاوی مدل طراحی شده، با استفاده از فایل bas که قبلاً تهیه شده است (چگونگی ایجاد فایل bas در مرجع [8] توضیح داده شده است) در محیط پایتون فراخوانی و اجرا می‌شود.

```
from subprocess import call } (۱)
call(["CST_MWS_Path\CST DESIGN ENVIRONMENT.exe"
     ,"m","file_Path\cmdfile.bas"]) } (۲)
```

1) برای فراخوانی نرم‌افزار CST توسط برنامهٔ پایتون، تابع call از کتابخانهٔ subprocess فراخوانی شده است.

2) با این دستور، نرم‌افزار CST فراخوانی و اجرا می‌شود. این دستور شامل دو بخش است، بخش اول مسیر نصب نرم‌افزار CST روی سیستم و بخش دوم مسیر قرار گرفتن فایل bas را نشان می‌دهد.

با اجرای نرم‌افزار CST، نتایج شبیه‌سازی در پوشهٔ Result ذخیره می‌شود که می‌توان آن را با استفاده از برنامهٔ پایتون فراخوانی کرد. به‌عنوان مثال، با اجرای مدل مربوط به کاواک WR187، فرکانس تشدیدی در پوشهٔ Result در فایل Model.log چاپ می‌شود. با استفاده از دستورات زیر در محیط پایتون می‌توان مقدار فرکانس تشدیدی را از فایل Model.log فراخوانی کرد.

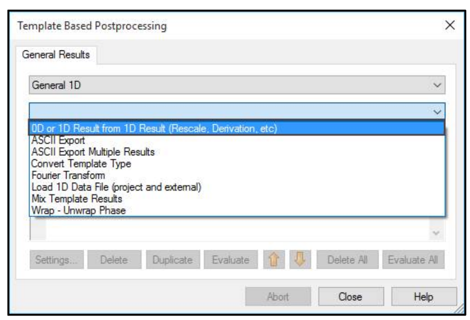
[1] Visual Basic Application

```
lines = open('cavity\Result\Model.log').readlines()
index = [x for x in range(len(lines))
         if 'frequency' in lines[x].lower()]
p = list(np.array([item.split() for item in
          lines[index[3]].split('\n')[:-1]]).flat)
q = list(np.array([item.split() for item in
         lines[index[3]+1].split('\n')[:-1]]).flat)
Frequency = q[p.index('Frequency')]
```

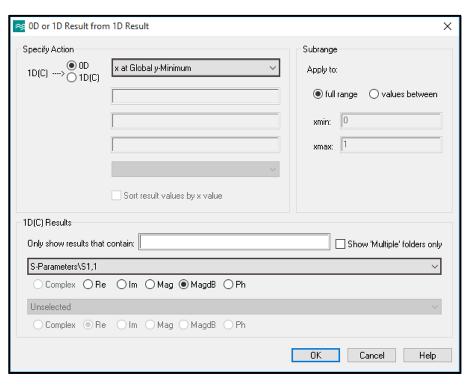
به‌این ترتیب، با اجرای متعدد نرم‌افزار CST (به تعداد گره‌ها) فرکانس‌های تشدیدی مربوط به ابعاد کاواک WR187 را به‌دست می‌آوریم و با دستور زیر در فایل Frequency.txt ذخیره می‌کنیم.

```
import numpy as np
np.savetxt('Frequency.txt',  Frequency, fmt='%.12f')
```

همچنین برای فرکانس کار کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800، در قسمت پس پردازش[1] نرم‌افزار CST، نتایج یک بُعدی را انتخاب می‌کنیم، (شکل4الف). سپس با انتخاب گزینهٔ x at Global y-Minimum برای نمودار پارامتر پراکندگی S_{11}، فرکانس کار را تعیین می‌کنیم، (شکل4ب).



الف



ب

شکل4. الف: تب نتایج، گزینهٔ نتایج تک بُعدی، ب: تعریف فرکانس در مینیمم مقدار S_{11} (فرکانس کار کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800).

با اجرای مدل مقدار فرکانس کار در پوشه Result در فایل S1,1_0D_xAtGlobalYMin.rd0 چاپ می‌شود. با استفاده از دستور زیر در محیط پایتون می‌توان مقدار فرکانس کار را فراخوانی کرد.

```
Frequency = open('coupler/Result/S1,1_0D_xAtGlobalYMin.rd0'
            ,'r').read()
```

استفاده از روش gPC در پایتون برای محاسبهٔ فرکانس تشدیدی کاواک WR187

برای به‌دست آوردن تابع $f(x,y)$ (تابع فرکانس تشدیدی کاواک WR187) با استفاده از روش gPC، برنامه زیر را در محیط پایتون می‌نویسیم.

```
import chaospy as cp
from numpy import legendre as Leg     } (۱)

M = 2
order_P = 2   } (۲)

n=2**order_P+1  } (۳)

Node , Weight = cp.quad_clenshaw_curtis(n-1, -1, 1) } (۴)

f=np.loadtxt('Frequency.txt') } (۵)

i=-1
for a1 in range (order_P + 1):
      for a2 in range (order_P + 1):
            alpha = abs(a1 + a2)            } (۶)
            if order_P >= alpha:
                  i += 1

                  a = [a1,a2] } (۷)

                  for j in range(0, n, 1):
                        for k in range(0, n, 1):
                              Pa1[i,j] = Leg.Legendre(a1,Node[j])
                              Pa2[i,k] = Leg.Legendre(a2,Node[k])
                              P[j,k] = Pa1[i,j] * Pa2[i,k]

                              W[j,k] = Weight[j] * Weight[k]  } (

                  Integral[i] = sum(sum(W * P * f))  } (۱۰)

                  for m in range(M):
                        gamma[m] = ((2.0*a[m] + 1)/2.0) } (۱۱)
                  Gamma[i]= np.prod(gamma)

                  c[i] = np.dot(Gamma[i],Integral[i]) } (۱۲)
```

[20] Post Processing

```
import sympy as sy
x = sy.Symbol('x')
y = sy.Symbol('y')
```
(۱۳)

```
i=-1
for a1 in range (order_P+1):
        for a2 in range (order_P+1):
                alpha = abs(a1 + a2)
                if order_P>=alpha:
                        i+= 1
                        La1[i] = Leg.Legendre(a1,x)
                        La2[i] = Leg.Legendre(a2,y)
                        L[i]=La1[i]*La2[i]
```
(۱۴)

```
def f(x,y):
        return sum(c*L)
```
(۱۵)

1) کتابخانهٔ chaospy برای محاسبه گره‌ها و تابع وزن فراخوانی و از کتابخانهٔ numpy توابع لژاندر فراخوانی می‌شوند.

2) تعداد متغیرها با M و مرتبهٔ بسط با N با order_P تعریف شده است.

3) تعداد گره‌های روش کلینشو کورتیز با استفاده از رابطهٔ5 مشخص می‌شود.

4) با استفاده از کتابخانهٔ chaospy گره‌ها و تابع وزن متناظر با گره‌ها از روش کلینشو کورتیز به‌دست می‌آید.

5) نتایجی که در قسمت قبل به‌دست آمده، در این قسمت فراخوانی می‌شود (به‌طور مثال، فایل Frequency.txt ذخیره شده در قسمت قبل).

6) شرط $\chi(2,2)=\{\alpha \in \mathbb{N}^2 : (\alpha_1+\alpha_2) \le 2\}$ نعریف شده است.

7) شاخص $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ تعریف می‌شود.

8) حاصل‌ضرب چند جمله‌ای‌های لژاندر به‌ازای گره‌ها $(P_{\alpha_1}(t_{1,i_1})P_{\alpha_2}(t_{2,i_2}))$ به‌دست می‌آید.

9) حاصل‌ضرب تابع وزن متناظر با گره‌ها $(w(t_{1,i_1})w(t_{2,i_2}))$ محاسبه می‌شود.

10) با این دستور، حاصل انتگرال رابطهٔ3 با استفاده از روش کلینشو کورتیز به‌دست می‌آید.

11) حاصل رابطهٔ $\gamma_\alpha=(\frac{2}{2\alpha_1+1})(\frac{2}{2\alpha_2+1})$ محاسبه می‌شود.

12) با این دستور، ضرایب بسط با استفاده از رابطهٔ7 محاسبه می‌شود.

13) کتابخانهٔ sympy برای تعریف متغیر x و y به‌عنوان سمبُل فراخوانی شده است.

14) چند جمله‌ای پایهٔ لژاندر $\mathbf{P}_\alpha = P_{\alpha_1}(x)P_{\alpha_2}(y)$ تعریف شده است.

15) تابع $\mathrm{f}(x,y)$ با استفاده از رابطهٔ2 تعریف می‌شود.

پس از اجرای این برنامه، تابع به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

```
f(x,y) = 0.000901602094584902*x**2 - 0.00106875131755339*x*y
        - 0.0279610178507774*x + 0.0136614456815839*y**2
        - 0.277356966631323*y + 7.46561083369622
```

برای به‌دست آوردن PDF تابع $\mathrm{f}(x,y)$، 10^4 نمونهٔ تصادفی با توزیع یکنواخت در بازهٔ $[-1,1]$ برای متغیرهای x و y ایجاد می‌کنیم (دستور زیر).

```
x = sorted((cp.Uniform(-1.0,1.0)).sample(10**4))
y = sorted((cp.Uniform(-1.0,1.0)).sample(10**4))
```

با جایگذاری این نمونه‌های تصادفی در تابع $\mathrm{f}(x,y)$، 10^4 مقدار برای فرکانس تشدیدی به‌دست می‌آید. تابع چگالی احتمال از روش کرنل با دستور زیر محاسبه می‌شود.

```
from scipy import stats
kde = stats.gaussian_kde(f)
freq = np.linspace(f.min(), f.max(), 25)
PDF = kde(freq)
```

در این برنامه، کتابخانهٔ scipy فراخوانی و از قسمت stats تابع کرنل با نام kde تعریف می‌شود. سپس تعدادی نمونهٔ تصادفی برای f در نظر گرفته و با نام freq مشخص می‌کنیم و PDF آن را به‌دست می‌آوریم (در قسمت نتیجه‌گیری، نتایج آورده شده است)

شاخص سابُل در برنامه‌ی پایتون

برای محاسبهٔ شاخص حساسیت سابُل می‌توان از بستهٔ Chaospy استفاده کرد. این بسته حاوی ابزار Sensitivity برای توصیف شاخص سابُل است که در آن توابعی مانند Sens_m برای محاسبهٔ شاخص سابُل مرتبهٔ اول، Sens_m2 برای محاسبهٔ شاخص سابُل

مرتبهٔ دوم وجود دارند. شاخص سابُل در پایتون توسط برنامهٔ زیر محاسبه می‌شود.

```
import chaospy as cp

x, y= cp.variable(2)
from gPC import f as function        } (۱)

x=cp.Uniform(-1,1)
y=cp.Uniform(-1,1)
distribution = cp.J(x, y)            } (۲)

frist_order_sobol = cp.descriptives.sensitivity
                  .Sens_m(function,distribution)    } (۳)

second_order_sobol = cp.descriptives.sensitivity
                  .Sens_m2(function,distribution)   } (۴)
```

1) تابع $f(x, y)$ که با استفاده از روش gPC در پایتون به دست آمده فراخوانی می‌شود.

2) برای محاسبهٔ شاخص‌های سابُل در قسمت 3 و 4، باید نوع توزیع تصادفی متغیرهای ورودی مشخص شود. در اینجا برای متغیرهای ورودی توزیع تصادفی یکنواخت در بازهٔ $[-1,1]$ تعریف شده است.

3) از کتابخانهٔ Chaospy، تابع Sens_m برای محاسبهٔ شاخص سابُل مرتبهٔ اول فراخوانی می‌شود. این تابع، شاخص سابُل مرتبهٔ اول را بر اساس رابطهٔ15 محاسبه می‌کند.

4) تابع Sens_m2 برای محاسبهٔ شاخص سابُل مرتبهٔ دوم فراخوانی می‌شود. این تابع، شاخص سابُل مرتبهٔ دوم را بر اساس رابطهٔ16 به‌دست می‌آورد.

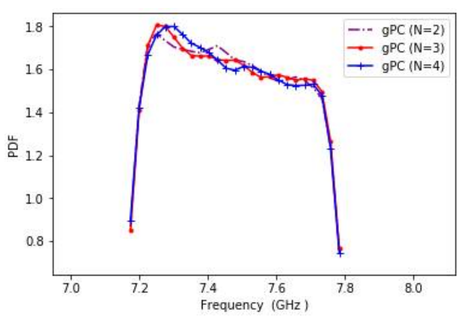
نتایج

نتایج تغییرات ابعاد کاواک WR187 بر فرکانس تشدیدی

با در نظر گرفتن 0/1 cm تغییرات ابعاد به‌عنوان خطای ساخت کاواک WR187، پارامتر a دارای توزیع تصادفی یکنواخت در بازهٔ $[4/655cm,4/855cm]$ و پارامتر b دارای توزیع تصادفی یکنواخت در بازهٔ $[2/115cm,2/315cm]$ است. اثر تغییرات پارامتر a و b بر فرکانس تشدیدی از روش‌های زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد و PDF آن محاسبه می‌شود.

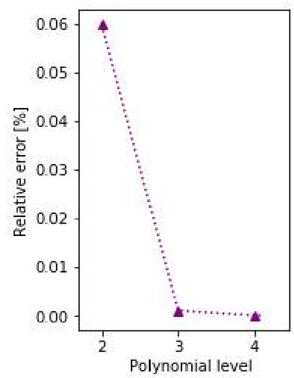
1) PDF فرکانس تشدیدی با استفاده از روش gPC

با استفاده از روش gPC فرکانس تشدیدی را برای مرتبه‌های مختلف بسط ($N=2$، $N=3$ و $N=4$) به‌دست آوردیم. با فرض 10^4 نمونهٔ تصادفی برای هر دو پارامتر a و b، PDF فرکانس تشدیدی را برای کاواک WR187 به‌دست آوردیم (شکل5).



شکل5. نمودار تابع چگالی احتمال فرکانس تشدیدی کاواک WR187 با استفاده از روش gPC به ازای مرتبه‌های مختلف بسط.

در شکل6 برای بررسی همگرائی نتایج حاصل از این روش، نمودار درصد خطای نسبی فرکانس تشدیدی به‌دست آمده از روش gPC برحسب مرتبه‌های مختلف بسط نشان داده شده است.



شکل6. نمودار درصد خطای نسبی فرکانس تشدیدی کاواک WR187 برحسب مرتبه‌های مختلف بسط.

درصد خطای نسبی روش‌های gPC در مرتبه‌های بسط $N=2$، $N=3$ و $N=4$ به‌ترتیب برابر با 6×10^{-2}، 1×10^{-3}، $8/3\times10^{-5}$ است که خطای روش gPC در مرتبهٔ بسط $N=4$ مینیمم مقدار را دارد، لذا از روش gPC در مرتبهٔ بسط $N=4$ برای مقایسه با روش‌های تئوری و مونت‌کارلو استفاده می‌کنیم.

2) PDF فرکانس تشدیدی با استفاده از روش تئوری

با توجه به رابطهٔ1، با فرض اینکه فضای داخل کاواک خلأ و مد غالب آن TM_{110} باشد رابطهٔ18 برای محاسبهٔ فرکانس تشدیدی برقرار است.

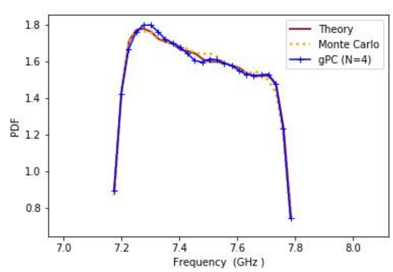
$$f_{110}=\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2} \qquad 18$$

در اینجا، ε_0 ضریب گذردهی الکتریکی خلأ و μ_0 ضریب تراوایی مغناطیسی خلأ هستند. به‌ازای 10^4 نمونهٔ تصادفی برای بازه‌های مورد نظر پارامتر a و b ، فرکانس تشدیدی محاسبه شد و PDF آن به‌دست آمد.

3) PDF فرکانس تشدیدی با استفاده از روش مونت‌کارلو

در روش مونت‌کارلو، 10^4 نمونهٔ تصادفی در بازهٔ $[4/655\text{cm},4/855\text{cm}]$ برای پارامتر a و 10^4 نمونهٔ تصادفی در بازهٔ $[2/115\text{cm},2/315\text{cm}]$ برای پارامتر b در نظر گرفته می‌شود. به‌ازای هر نمونهٔ تصادفی برای پارامترهای a و b، مدل با ابعاد جدید در نرم‌افزار شبیه‌سازی CST تحت کنترل پایتون ایجاد و فرکانس تشدیدی آن محاسبه شد، سپس PDF فرکانس تشدیدی به‌دست آمد.

برای سنجش دقت روش gPC، نمودار PDF فرکانس تشدیدی به‌دست آمده از روش gPC در مرتبهٔ بسط $N=4$ با روش‌های تئوری و مونت‌کارلو مقایسه شده است، (شکل7). با استفاده از این نتایج، میانگین فرکانس تشدیدی برای روش gPC در مرتبهٔ بسط $N=4$ برابر $7/4685GHz$ و برای روش مونت‌کارلو برابر $7/4687GHz$ است، که به‌ترتیب 0/04% و 0/042% از مقدار فرکانس تشدیدی اولیهٔ کاواک، اختلاف دارد.



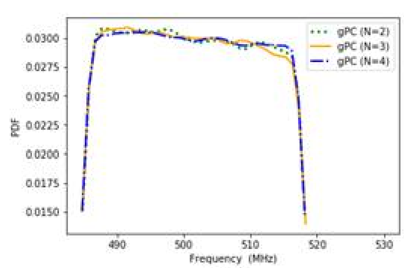
شکل7. مقایسهٔ نمودار تابع چگالی احتمال فرکانس تشدیدی کاواک WR187 به‌دست آمده از روش gPC در مرتبهٔ بسط $N=4$ با روش‌های تئوری و مونت‌کارلو.

همان‌طور که در شکل7 دیده می‌شود، نتایج روش gPC به‌ازای مرتبهٔ بسط $N=4$ که در مدت زمان بسیار کمتری نسبت به‌روش مونت‌کارلو به‌دست آمده است نیز تطابق نسبتاً خوبی با تئوری دارد (روش مونت کارلو تقریبا 72 ساعت و روش gPC نزدیک به 6 ساعت).

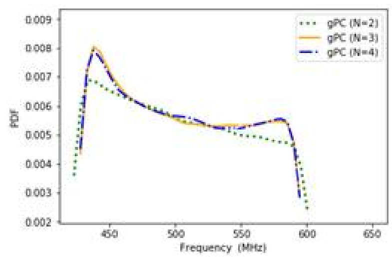
برای بررسی اینکه هر یک از پارامترهای a و b چه میزان در فرکانس تشدیدی اثر دارند شاخص سابُل محاسبه می‌شود. شاخص سابُل مرتبهٔ اول برای پارامتر a، S_a، برابر $1٫005716\times10^{-2}$ و برای پارامتر b، S_b، برابر 0٫98993795 است. همچنین، شاخص سابُل مرتبهٔ دوم برای پارامترهای a و b، $S_{a,b}$، برابر $4٫9\times10^{-6}$ است. بزرگتر بودن S_b از S_a نشان می‌دهد، اثر تغییرات پارامتر b بیشتر از اثر تغییرات پارامتر a بر فرکانس تشدیدی است.

نتایج تغییرات ابعاد کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 بر فرکانس کار

برای ارزیابی تغییرات پارامتر d و $delta$ بر فرکانس کار کوپلر از روش gPC برای مرتبه‌های $N=2$، $N=3$ و $N=4$ استفاده می‌کنیم. به‌طور مثال، با در نظر گرفتن 2% تغییر در مقادیر این دو پارامتر، d در بازهٔ [126٫42mm,131٫58mm] و $delta$ در بازهٔ [117٫6mm,122٫4mm] تغییر می‌کنند. به‌همین ترتیب 10٪ تغییر در مقادیر این پارامترها را در نظر گرفتیم. در شکل8، با در نظر گرفتن 10^5 نمونهٔ تصادفی برای پارامترهای d و $delta$، PDF فرکانس کار را برای تغییرات 2٪ و 10٪ به‌دست آوردیم.



(الف)



(ب)

شکل8. نمودار تابع چگالی احتمال فرکانس کار کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 به‌دست آمده از روش gPC به‌ازای مرتبه‌های مختلف بسط برای تغییرات الف) 2%، ب) 10٪.

با استفاده از PDF های به‌دست آمده برای تغییرات 2٪ و 10٪ پارامترهای d و $delta$، مقدار میانگین و انحراف معیار استاندارد فرکانس کار محاسبه کردیم (جدول1).

جدول1. میانگین و انحراف معیار استاندارد فرکانس کار با استفاده از PDF های به‌دست آمده برای تغییرات 2% و 10% پارامترهای کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800.

روش gPC در مرتبه‌ی بسط	توصیف آماری	فرکانس کار (MHz) تغییرات 2% پارامتر d و delta	تغییرات 10٪ پارامتر d و delta
$N=2$	میانگین	501٫3505	505٫02463
	انحراف معیار	9٫6243	51٫605195
$N=3$	میانگین	501٫29858	505٫4778
	انحراف معیار	9٫63087	49٫9328
$N=4$	میانگین	501٫3643	505٫290
	انحراف معیار	9٫6367	49٫966

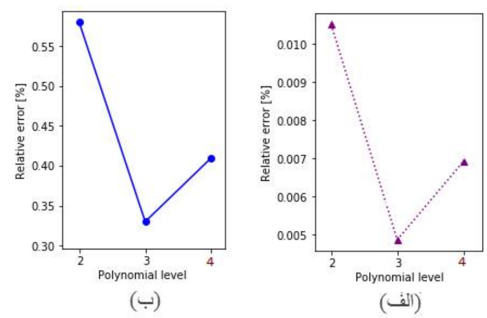
برای تغییرات 2٪ و 10٪ پارامترهای d و $delta$، در صد فرکانس‌های که در باند فرکانسی 487 تا 516 مگاهرتز قرار دارند در جدول2 آورده شده است.

جدول2. درصد فرکانس‌های موجود در باند فرکانسی 487 تا 516 مگاهرتز برای تغییرات 2٪ و 10٪ پارامترهای کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800.

	درصد فرکانس‌های موجود در باند فرکانسی 487 تا 516 مگاهرتز

روش gpc در مرتبه‌ی بسط	تغییرات 2% پارامتر d و delta	تغییرات 10% پارامتر d و delta
$N=2$	87	16٫2
$N=3$	86٫95	16
$N=4$	87٫05	16٫35

با در نظر گرفتن تغییرات 2% برای پارامترهای d و $delta$، حدود 87 در صد فرکانس کار در باند فرکانسی 487 تا 516 مگاهرتز قرار دارند. برای تغییرات 10% پارامترهای d و $delta$ حدود 16 در صد فرکانس کار در این باند فرکانسی قرار دارند. در شکل9، نمودار درصد خطای نسبی تغییرات فرکانس کار با استفاده از روش gPC برحسب مرتبه‌های مختلف بسط برای تغییرات 2% و 10% پارامترهای d و $delta$ نشان داده شده است.



شکل9. نمودار درصد خطای نسبی فرکانس کار کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 برحسب مرتبه‌های مختلف بسط برای تغییرات الف) 2%، ب) 10%.

با توجه به جدول1 برای ٪2 تغییرات، مقدار میانگین فرکانس کار تقریباً 501 MHz است که به‌مقدار اولیهٔ فرکانس کار(500 MHz) نزدیک‌تر است. با توجه به‌شکل9، برای تغییرات ٪2، مینیمم مقدار خطای نسبی (مرتبهٔ بسط $N=3$) برابر 5×10^{-3} است. در حالی‌که، برای تغییرات 10%، مینیمم مقدار خطای نسبی (مرتبهٔ بسط $N=3$) برابر $3٫3\times10^{-1}$ است، پس خطای روش gPC برای ٪2 کمتر از ٪10 است. با استفاده از نتایج به‌دست آمده، می‌توان گفت ٪2 خطا در ساخت کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 مجاز خواهد بود. در جدول3، شاخص سابُل مرتبهٔ اول برای پارامتر d، S_d، شاخص سابُل مرتبهٔ اول برای پارامتر $delta$ ، S_{delta} ، و شاخص سابُل مرتبهٔ دوم برای پارامترهای d و $delta$، $S_{d,delta}$، به‌ازای تغییرات ٪2 و 10% نشان داده شده است.

جدول3. شاخص سابُل مرتبهٔ اول و دوم برای پارامتر d و $delta$ به‌ازای تغییرات ٪2 و ٪10 پارامترهای کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800.

	شاخص سابُل	$N=2$	$N=3$	$N=4$
تغییرات 2% پارامتر d و delta	S_{delta}	92٫604463	92٫591182	92٫652996
	S_d	7٫395427	7٫408077	7٫345954
	$S_{d,\,delta}$	$1٫1\times10^{-4}$	$7٫4\times10^{-4}$	$1٫05\times10^{-3}$
تغییرات 10% پارامتر d و delta	S_{delta}	94٫862319	94٫785984	95٫113353
	S_d	5٫035444	5٫038758	4٫702459
	$S_{d,\,delta}$	0٫1	0٫175	0٫184

با توجه به‌جدول3 برای تغییرات 2% و ٪10، S_{delta} بزرگتر از S_d است که نشان می‌دهد اثر تغییرات پارامتر $delta$ بیشتر از پارامتر d بر فرکانس کار است.

نتیجه‌گیری

روش gPC بر پایهٔ بسط چند جمله‌ای‌های متعامد است. با استفاده از این روش، می‌توان اثر خطا در پارامترهای هندسهٔ مدل را بر خروجی مورد مطالعه، بررسی کرد. اگر چه زمان اجرای این روش نسبت به‌روش مونت‌کارلو کمتر است ولی با افزایش پارامترهای دارای خطا در مدل، زمان اجرای این روش

هم افزایش می‌یابد. با استفاده از شاخص سائل، پارامترهایی که خطای آنها در خروجی مورد نظر اثر بیشتری دارند را می‌توان تعیین کرد. روش gPC، برای مطالعهٔ فرکانس تشدیدی در کاواک WR187 و فرکانس کار در کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 به‌کار برده شد. در این مطالعه، برای کاواک WR187، تغییرات 0/1 cm پارامترهای a و b در نظر گرفته شد. با مقایسهٔ PDF های فرکانس تشدیدی به‌دست آمده از روش‌های gPC، تئوری و مونت‌کارلو، دقت روش gPC نشان داده شد. همچنین، پارامترهای هندسهٔ ساختار کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 به‌عنوان متغیرهای تصادفی با توزیع یکنواخت با تغییرات ٪2 و ٪10 در نظر گرفته شد. با در نظر گرفتن تغییرات ٪2 برای پارامترهای ورودی این ساختار، حدود ٪87 فرکانس کار در باند فرکانسی مجاز قرار می‌گیرند ولی برای تغییرات ٪10 پارامترهای ورودی، حدود ٪16 فرکانس کار در باند فرکانسی مجاز قرار دارند. نشان داده شد، میانگین فرکانس کارPDF بدست آمده برای تغییرات ٪2 به مقدار اولیهٔ فرکانس کار (500MHz) نزدیک‌تر است، همچنین خطای روش gPC برای تغییرات ٪2 کمتر از تغییرات ٪10 است. لذا به‌نظر می‌رسد، در ساخت کوپلر کواکسیال به‌موجبر WG1800 خطای ٪2 در ابعاد ساختار می‌تواند مجاز باشد. با محاسبهٔ شاخص سائل پارامترهای d و $delta$ برای این کوپلر، مشخص شد که در محاسبهٔ فرکانس کار پارامتر $delta$ بیشترین تأثیر را دارد. نتایج این مقاله در ساخت کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 می‌تواند مورد استفاده قرار بگیرد.

پیوست الف)

برای اثبات خطای ضرایب، تابع تک متغیره ($M=1$) در نظر گرفته شده است که خطای آن با استفاده از رابطهٔ9 به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\mathrm{Error}=\mathrm{E}\left[\frac{\left|\sum_{\alpha\in\chi(1,N+1)} c_\alpha^{(N+1)}P_\alpha(\xi_1)-\sum_{\alpha\in\chi(1,N)} c_\alpha^{(N)}P_\alpha(\xi_1)\right|}{\left|\sum_{\alpha\in\chi(1,N+1)} c_\alpha^{(N+1)}P_\alpha(\xi_1)\right|}\right],$$

که $c_\alpha^{(N+1)}$ ضرایب بسط به‌ازای مرتبهٔ $N+1$ و $c_\alpha^{(N)}$ ضرایب بسط به‌ازای مرتبهٔ N هستند. با محاسبهٔ سیگما و فاکتور گیری از چند جمله‌ای‌های لژاندر رابطهٔ زیر حاصل می‌شود.

$$\mathrm{Error}=\mathrm{E}\left[\frac{\left|\begin{array}{l}\left(c_0^{(N+1)}-c_0^{(N)}\right)P_0(\xi_1)+\ldots+\left(c_N^{(N+1)}-c_N^{(N)}\right)\\ P_N(\xi_1)+c_{N+1}^{(N+1)}P_{N+1}(\xi_1)\end{array}\right|}{\left|\begin{array}{l}c_0^{(N+1)}P_0(\xi_1)+\ldots+c_N^{(N+1)}P_N(\xi_1)\\ +c_{N+1}^{(N+1)}P_{N+1}(\xi_1)\end{array}\right|}\right],$$

صورت و مخرج کسر به توان دو رسیده و از آن جذر گرفته می‌شود.

$$\mathrm{Error}=\mathrm{E}\left[\frac{\sqrt{\left|\begin{array}{l}\left(c_0^{(N+1)}-c_0^{(N)}\right)P_0(\xi_1)+\ldots+\left(c_N^{(N+1)}-c_N^{(N)}\right)\\ P_N(\xi_1)+c_{N+1}^{(N+1)}P_{N+1}(\xi_1)\end{array}\right|^2}}{\sqrt{\left|\begin{array}{l}c_0^{(N+1)}P_0(\xi_1)+\ldots+c_N^{(N+1)}P_N(\xi_1)\\ +c_{N+1}^{(N+1)}P_{N+1}(\xi_1)\end{array}\right|^2}}\right],$$

با حل توان دو صورت و مخرج کسر توسط اتحاد مربع چند جمله‌ای و تعریف حاصل ضرب چند جمله‌ای‌های متعامد $P_\alpha(\xi_1)P_\beta(\xi_1)=0$ و $P_\alpha^2(\xi_1)=1$ رابطهٔ خطا به‌صورت زیر ساده می‌شود.

$$Error=\frac{\sqrt{\left|c_{0}^{(N+1)}-c_{0}^{(N)}\right|^{2}+\ldots+\left|c_{N}^{(N+1)}-c_{N}^{(N)}\right|^{2}+\left|c_{N+1}^{(N+1)}\right|^{2}}}{\sqrt{\left|c_{0}^{(N+1)}\right|^{2}+\ldots+\left|c_{N}^{(N+1)}\right|^{2}+\left|c_{N}^{(N+1)}\right|^{2}}}
=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N+1}\left|c_{i}^{(N+1)}-c_{i}^{(N)}\right|^{2}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N+1}\left|c_{i}^{(N+1)}\right|^{2}}},$$

که $c_{N+1}^{(N)}$ برابر صفر است. با توجه به‌تعریف نُرم مرتبهٔ دوم ($\left\|\vec{C}\right\|=\sqrt{\sum_{i=0}^{N}\left|c_i\right|^{2}}$) رابطهٔ زیر برای خطای ضرایب بر قرار است.

$$Error=\frac{\left\|\vec{C}^{(N+1)}-\vec{C}^{(N)}\right\|}{\left\|\vec{C}^{(N+1)}\right\|}$$

پیوست ب

در رابطهٔ11، اگر چند جمله‌ای پایهٔ لژاندر چند متغیره را به‌صورت حاصل‌ضرب چند جمله‌ای‌های لژاندر تک متغیره بنویسیم، خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}
f\left(\vec{\xi}\right)=\; & c_{0,0}P_0(\xi_1)P_0(\xi_2)+c_{0,1}P_0(\xi_1)P_1(\xi_2)+c_{0,2}P_0(\xi_1)P_2(\xi_2)\\
& +c_{0,3}P_0(\xi_1)P_3(\xi_2)+c_{1,0}P_1(\xi_1)P_0(\xi_2)+c_{1,1}P_1(\xi_1)P_1(\xi_2)\\
& +c_{1,2}P_1(\xi_1)P_2(\xi_2)+c_{2,0}P_2(\xi_1)P_0(\xi_2)+c_{2,1}P_2(\xi_1)P_1(\xi_2)\\
& +c_{3,0}P_3(\xi_1)P_0(\xi_2)
\end{aligned}$$

در اینجا $P_0(\xi_1)=P_0(\xi_2)=1$ است. بنابراین، می‌توان نوشت.

$$\begin{aligned}
f\left(\vec{\xi}\right)=\; & c_{0,0}+\left[c_{1,0}P_1(\xi_1)+c_{2,0}P_2(\xi_1)+c_{3,0}P_3(\xi_1)\right]\\
& +\left[c_{0,1}P_1(\xi_2)+c_{0,2}P_2(\xi_2)+c_{0,3}P_3(\xi_2)\right]\\
& +c_{1,1}P_1(\xi_1)P_1(\xi_2)+c_{1,2}P_1(\xi_1)P_2(\xi_2)\\
& +c_{2,1}P_2(\xi_1)P_1(\xi_2)
\end{aligned}$$

با استفاده از رابطهٔ2، رابطهٔ بالا به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
f\left(\vec{\xi}\right)=\; & c_{0,0}+\sum_{\alpha\in\chi(1,3)}c_\alpha\mathbf{P}_\alpha(\xi_1)+\sum_{\alpha\in\chi(1,3)}c_\alpha\mathbf{P}_\alpha(\xi_2)\\
& +\sum_{\alpha\in\chi(2,3)}c_\alpha\mathbf{P}_\alpha(\xi_1,\xi_2)
\end{aligned}$$

در اینجا، اگر چند جمله‌ای پایهٔ لژاندر تک متغیره را با $\mathbf{P}_\alpha(\xi_i)$ و چند جمله‌ای پایهٔ لژاندر دو متغیره را با $\mathbf{P}_\alpha(\xi_i,\xi_j)$ نمایش دهیم آنگاه رابطهٔ بالا به‌صورت زیر ساده می‌شود.

$$\begin{aligned}
f\left(\vec{\xi}\right)=\; & c_{0,0}+\sum_{i=1}^{M=2}\sum_{\alpha\in\chi(1,3)}c_\alpha\mathbf{P}_\alpha(\xi_i)\\
& +\sum_{i=1}^{M=2}\sum_{\substack{j=1\\ j>i}}^{M=2}\sum_{\alpha\in\chi(2,3)}c_\alpha\mathbf{P}_\alpha(\xi_i,\xi_j)
\end{aligned}$$

مرجع‌ها

[1] P. Mattia, C.M. Sergio, G.M. Dimitrov, Comparative Analysis of Uncertainty Propagation Methods for Robust Engineering Design, *Guidelines for a Decision Support Method Adapted to NPD Processes* (2007). https://designsociety.org/publication/25352

[2] J. Heller, U. Van Rienen, T. Flisgen, C. Schmidt, Uncertainty Quantification for Complex RF-structures Using the State-space Concatenation Approach, *Progress In Electromagnetics Research Proceedings, Prague, Czech Republic* (2015) 374-378. https://cds.cern.ch/record/2132775

[3] C. Schmidt, T. Flisgen, J. Heller, U. van Rienen, Comparison of techniques for uncertainty quantification of superconducting radio frequency cavities, *International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications* (2014) 117-120. https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/6903838

[4] J. Heller, T. Flisgen, C. Schmidt, U. van Rienen, Quantification of geometric uncertainties in single cell cavities for BESSY VSR using polynomial chaos, *In 5th International Particle Accelerator*

Polynomial Chaos, *Proceedings of the 10th AIAA nondeterministic approaches conference* (2008) 1892-1914. https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2008-1892

[12] J. Waldvogel, Fast construction of the Fejer and Clenshaw–Curtis quadrature rules, *BIT Numerical Mathematics* ***46*** *1* (2006) 195-202. https://link.springer.com/article/10.1007/s10543-006-0045-4

[13] S.H. Lee, W. Chen, A comparative study of uncertainty propagation methods for black-box type functions, *ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, American Society of Mechanical Engineers* (2007) 1275-1284. https://asmedigitalcollection.asme.org/IDETC-CIE/proceedings-abstract/IDETC-CIE2007/48078/1275/330248

[14] F. Jamshidi, M. Falah, Z. Khani, M. Keshavarz, Density estimation for statistics and data, *Statistics Research Institute, Statistical Centre of Iran* (2005). http://www.srtc.ac.ir/Archives-of-research-projects/ID/1697

[15] F. Nobile, R. Tempone, C.G. Webster, An anisotropic sparse grid stochastic collocation method for partial differential equations with random input data, *SIAM Journal on Numerical Analysis* ***46 5*** (2008) 2411-2442. https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/070680540

[16] A. Saltelli, P. Annoni, I. Azzini, F. Campolongo, M. Ratto, S. Tarantola, Variance based sensitivity analysis of model output. Design and estimator for the total sensitivity index, *Computer Physics Communications* ***181*** 2 (2010) 259-270. https://sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465509003087

Conference, Dresden, Germany (2014) pp.415. https://cds.cern.ch/record/1748644

[5] D.M. Pozar, *Microwave engineering*, John Wiley & Sons (2009).

[6] M. Mostajeran, F. Kazemi. The resonant frequencies of the rectangular waveguide cavity resonator WR-187 using CST software and MATLAB program interface, *3rd National Conference on Particle Accelerators and their applications, (2017) 246-249*. http://psi.ir/farsi.asp?page=iranpac2017

[7] F. Naito, K. Akai, N. Akasaka, E. Ezura, T. Kageyama, T. Shintake, Y. Takeuchi and Y. Yamazaki, Input coupler for the KEKB normal conducting cavity, *Proceedings Particle Accelerator Conference* ***3*** *IEEE*, (1995) 1806-1808. https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/505368

[8] M. Mostajeran, F. Kazemi. Optimization of a high-power coaxial coupler to 1800 waveguide coupler with high input power using CST simulator controlled by MATLAB., *Iranian Journal of Physics Research,* ***17*** *5, (2018)795-804.*

https://ijpr.iut.ac.ir/article_1322.html

[9] R.G. Ghanem, P.D. Spanos, Stochastic Finite Element Method: Response Statistics, *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach, Springer, New York,* (1991) 101-119. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4612-3094-6_4

[10] J. Feinberg, Some improvements and applications of non-intrusive polynomial chaos expansions, *PhD Thesis*, University of Oslo (2015). https://duo.uio.no/handle/10852/48588

[11] M.S. Eldred, C.G. Webster, P.G. Constantine, Evaluation of Non-Intrusive Approaches for Wiener-Askey Generalized

[17] S. Tennøe, G. Halnes, G.T. Einevoll, Uncertainty: A Python toolbox for uncertainty quantification and sensitivity analysis in computational neuroscience, *Frontiers in neuroinformatics* **12** (2018) 49. https://frontiersin.org/articles/10.3389/fninf.2018.00049/full

[18] K. Sargsyan, C. Safta, K. Chowdhary, S. Castorena, S. De Bord, B. Debusschere, UQTK version 3.0.4 user manual, *Sandia National Laboratories, Sandia report,* (2017) 11051. https://usermanual.wiki/Pdf/UQTkv304manual.25208448

[19] I.M. Sobol, Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates, *Mathematics and computers in simulation* ***55*** *1-3* (2001) 271-280. https://sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0378475400002706