Time evolution of quantum correlation and entropic uncertainty relation in the presence of quantum memory under noisy channels and one-axis twisting Hamiltonian

Mohammad Reza Pourkarimi*

Department of Physics, Faculty of Sciences, Salman Farsi University of Kazerun,Kazerun, Iran

Received: 02.12.2018 Final revised: 06.01.2020 Accepted: 03.05.2020

Doi: 10.22055/jrmbs.2020.15560

Abstract

Assuming, a symmetric system with N qubits under Hamiltonian one-axis twisting and different kinds of noisy channels, such as amplitude damping, phase-flip and phase-damping channel, it is studied the time evolution of quantum correlation and entropic uncertainty relation in the presence of quantum memory. By comparing the behaviors of the dynamics of entropic uncertainty and quantum correlation, it is shown that they increase with increasing of the number of qubits in the beginning of the time. But, they behave in contrary to each other, during the time. As a result, the uncertainty of incompatible observables increases, when quantum correlation decreases.

Keywords: Quantum correlation, Entropic uncertainty relation, Quantum discord

*Corresponding Author:mrpourkarimy@gmail.com

تحول زمانی همبستگی کوآنتومی و رابطهٔ آنتروپی عدم قطعیت در حضور حافظهٔ کوآنتومی تحت واهمدوسی و هامیلتونی پیچش تک-محوری

محمدرضا پورکریمی*

گروه فیزیک،دانشکده علوم، دانشگاه سلمان فارسی کازرون، کازرون، ایران

دریافت: 1397/09/11 ویرایش نهائی:1398/10/16 پذیرش: 1399/02/14

Doi: 10.22055/jrmbs.2020.15560

چکیده

در این مقاله یک سیستم متقارن Nذره‌ای با اسپین 1/2 که تحت هامیلتونی پیچش تک-محوری قرار دارد را در نظر می‌گیریم. سپس با اعمال کانال‌های مختلف نوفه‌دار، همچون کانال میرایی دامنه، کانال فاز-گردان و کانال میرایی فاز، تحول زمانی همبستگی کوآنتومی و رابطهٔ آنتروپی عدم قطعیت در حضور حافظهٔکوآنتومی را به‌دست می‌آوریم. مقایسهٔ رفتار آنتروپی عدم قطعیت و همبستگی کوآنتومی نشان می‌دهد که در لحظهٔ شروع، با افزایش تعداد ذرات، مقدار اولیهٔ این کمیت‌ها افزایش می‌یابد. اما در طی زمان رفتار آنها عکس یکدیگر خواهد بود. به‌طور کلی با کاهش همبستگی کوآنتومی، عدم قطعیت در اندازه‌گیری مشاهده‌پذیرهای ناسازگار افزایش می‌یابد.

کلیدواژگان: همبستگی کوآنتومی، رابطهٔ آنتروپی عدم قطعیت، ناهمخوانی کوآنتومی

مقدمه

اصل عدم قطعیت یکی از اصول بنیادی نظریهٔ کوآنتوم است. این اصل بیان می‌کند که مشاهده‌پذیرهای ناسازگار P و Q را نمی‌توان به‌طور هم‌زمان و دقیق اندازه‌گیری کرد. این اصل ابتدا توسط هایزنبرگ در سال 1927 بیان شد [1]، سپس در سال 1929 توسط ربرتسون به‌صورت زیر فرمول‌بندی شد [2]:

$$\Delta P \Delta Q \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle [P,Q] \right\rangle\right| \qquad 1$$

که در آن $\Delta P=\sqrt{\langle P^2\rangle-\langle P\rangle^2}$ انحراف از میانگین است، $\langle P\rangle$ مقدار متوسط مشاهده‌پذیر P نسبت به‌حالت ρ و $[P,Q]=PQ-QP$ است.

رابطهٔ1 همیشه یک معیار مناسب برای اندازه‌گیری عدم قطعیت محسوب نمی‌شود، زیرا حد پایین این رابطه به‌حالت ρ بستگی دارد؛ به‌طوری‌که اگر مقدار سمت راست نامساوی صفر باشد، حد پایین رابطهٔ عدم قطعیت برای مشاهده‌پذیرهای ناسازگار صفر می‌شود و محدودیتی برای حد بالای آن وجود نخواهد داشت. به‌منظور برطرف کردن این مشکل در مرجع [3] رابطهٔ آنتروپی عدم قطعیت بیان شد و سپس در مرجع [4] این رابطه به‌صورت زیر ارتقاء یافت:

$$H(P)+H(Q) \geq \log_2 \frac{1}{c} \qquad 2$$

که در آن $H(P)=-\sum_i p_i \log_2 p_i$ آنتروپی شنون است، $p_i=\langle \psi_i|\rho|\psi_i\rangle$ و $c=\max_{ij}\{|\langle \psi_i|\phi_j\rangle|^2\}$ بیشینهٔ هم‌پوشانی

*نویسنده مسئول:mrpourkarimy@gmail.com

مشاهده‌پذیرهای غیر تبهگن Pو Q با ویژه‌حالت‌های به‌ترتیب $|\psi_i\rangle$ و $|\phi_j\rangle$ است. در این مقاله مشاهده‌پذیرهای P و Q را به‌ترتیب، σ_xو σ_z در نظر می‌گیریم که عملگرهای پائولی در جهت‌های x و z هستند. همان‌طور که از رابطهٔ2 مشخص است، حد پایین این نامساوی به‌حالت ρ بستگی ندارد و مقدار آن برای مشاهده‌پذیرهای ناسازگار صفر نخواهد شد.

در سال‌های اخیر به‌منظور بهبود رابطهٔ آنتروپی عدم قطعیت، رابطهٔ آنتروپی عدم قطعیت در حضور حافظه کوآنتومی ارائه شده است [5]. توضیح این رابطه به‌این صورت است:آلیس و باب دو کیوبیت درهم‌تنیده A و B (کیوبیت B به‌عنوان حافظهٔ کوآنتومی) را در اختیار دارند. آلیس یکی از مشاهده‌پذیرها را بر روی کیوبیت A اندازه‌گیری می‌کند و نتیجه را به باب اطلاع می‌دهد. باب با استفاده از نتایج آلیس، عدم قطعیت اندازه‌گیری خود را کمینه می‌کند. به‌عنوان مثال اگر حالت اولیه کاملاً درهم‌تنیده باشد و نتیجهٔ اندازه‌گیری آلیس در پایه‌های محاسباتی صفر باشد. باب با قطعیت می‌تواند بیان کند که کیوبیت B در حالت یک قرار دارد که این مزیت حضور حافظهٔ کوآنتومی در پیش بینی نتایج و کاهش عدم قطعیت در اندازه‌گیری مشاهده پذیرهای ناسازگار را نشان می‌دهد.به زبان ریاضی، رابطهٔ عدم قطعیت آنتروپی در حضور حافظه کوآنتومی به‌این صورت بیان می‌شود:

$$S(\rho_{P|B}) + S(\rho_{Q|B}) \geq S(\rho_{A|B}) + \log_2 \frac{1}{c} \quad 3$$

که در آن $S(\rho_{A|B}) = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B)$ آنتروپی شرطی فون نیومن است. بعد از اندازه‌گیری کیوبیت A توسط عملگر P حالت بعد از اندازه‌گیری به‌این صورت به‌دست می‌آید:

$$\sum_i (|\psi_i\rangle_A \langle\psi_i| \otimes I_B)\rho_{AB}(|\psi_i\rangle_A \langle\psi_i| \otimes I_B). \quad 4$$

آنتروپی عدم قطعیت کاربردهای فراوانی در نظریه اطلاعات کوآنتومی همچون رمزنگاری کوآنتومی یا توزیع کلید کوآنتومی و شواهد درهم‌تنیدگی دارد [6و7].

یکی دیگر از خصوصیات مهم نظریهٔ کوآنتوم، همبستگی کوآنتومی است که نظیر کلاسیکی ندارد. همبستگی کوآنتومی به‌روش‌های مختلفی قابل اندازه‌گیری است [8-11]. یکی از مقیاس‌های معروف همبستگی کوآنتومی، درهم‌تنیدگی است که در سال‌های اخیر محققین بسیاری روش‌هایی برای اندازه‌گیری آن نظیر کانکرنس (تلاقی) به‌دست آورده‌اند و از آن برای اندازه‌گیری همبستگی کوآنتومی در سیستم‌های کوآنتومی، نظیر سیستم‌های اسپینی استفاده کرده‌اند [12-18]. در اینجا برای جلوگیری از تکرار محاسبات از معیار دیگری استفاده می‌شود که در ادامه معرفی خواهد شد.

مقیاس دیگری که در سال‌های اخیر برای همبستگی کوآنتومی استفاده شده است، ناهمخوانی کوآنتومی است که برای اولین بار در مرجع [10] معرفی شد. ناهمخوانی کوآنتومی در مقایسه با درهم‌تنیدگی،گسترهٔ بیشتری از همبستگی را در سیستم‌های کوآنتومی آشکار می‌سازد. در این مقاله از ناهمخوانی کوآنتومی برای محاسبهٔ همبستگی کوآنتومی استفاده خواهد شد و به‌این صورت تعریف می‌شود:

$$QD(\rho_{AB}) = I(\rho_{AB}) - C(\rho_{AB}) \quad 5$$

که در آن $C(\rho_{AB})$ همبستگی کلاسیکی است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(\rho_{AB}) = S(\rho_{AB}) - \min S(\rho_{A|B}) \quad 6$$

که $S(\rho) = -tr(\rho \log_2 \rho)$، آنتروپی فون نیومن است. کمینه، از اعمال مجموعه عملگرهای مثبت روی قسمت B به‌دست می‌آید و $S(\rho_{A|B})$ آنتروپی شرطی است. $I(\rho_{AB})$ مجموع همبستگی‌های کلاسیکی و کوآنتومی است و به‌این صورت تعریف می‌شود:

$$I(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) \quad 7$$

که در آن ρ_A و ρ_B ماتریس چگالی تقلیل یافته ماتریس چگالی ρ_{AB} هستند. بیشینه سازی همبستگی کلاسیکی که در معادلهٔ6 بیان شد به‌روش تحلیلی نسبتاً مشکل است. برای این منظور روش‌های مختلفی بیان شده است که در اینجا از روش معرفی شده در مرجع [14] استفاده می‌کنیم. برای یک ماتریس چگالی X به‌شکل

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix} \quad 8$$

ناهمخوانی کوآنتومی عبارت است از:

$$QD(\rho_{AB}) = \min(\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2), \quad 9$$

که

$$Q_i = L(\rho_{11} + \rho_{33}) + \sum_{i=1}^{4} \zeta_i \log_2 \zeta_i + D_i \quad 10$$

و در آن

$$L(\mathrm{y}) = -y \log_2 y - (1-\mathrm{y}) \log_2 (1-\mathrm{y}), \quad 11$$

$$D_1 = -\sum_{i=1}^{4} \rho_{ii} \log_2 \rho_{ii} - L(\rho_{11} + \rho_{33}) \quad 12$$

و

$$D_2 = L(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4(|\rho_{14}| + |\rho_{23}|)^2 + (1 - 2(\rho_{33} + \rho_{44}))^2}}{2}) \quad 13$$

و ζ_i ویژه‌مقادیر ماتریس چگالی ρ_{AB} است.

در سال‌های اخیر همبستگی کوآنتومی و رابطهٔ آنتروپی عدم قطعیت در سیستم‌های کوآنتومی به‌ویژه سیستم‌های اسپینی مورد بررسی قرار گرفته است [19-23]. به‌عنوان مثال نشان داده شده است که افزایش همبستگی کوآنتومی باعث کاهش عدم قطعیت در اندازه‌گیری مشاهده‌پذیرهای ناسازگار می‌شود [19]. همچنین نشان داده شده است که بین این دو کمیت در یک زنجیرهٔ اسپینی گرمایی رابطهٔمشابهی وجود دارد [22]. اما تاکنون رابطهٔ بین کمیت‌های مذکور تحت هامیلتونی فشردگی اسپینی و برهم‌کنش با محیط، بررسی نشده است. بنابراین در این مقاله رفتار همبستگی کوآنتومی و آنتروپی عدم قطعیت در حضور حافظهٔکوآنتومی را در یک سیستم N کیوبیتی که تحت هامیلتونی پیچش تک-محوری قرار دارد و هر کیوبیت به‌طور مجزا با محیط خود برهم‌کنش می‌کند را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ترتیب مطالب این مقاله به‌این صورت است: در قسمت بعد، هامیلتونی پیچش تک-محوری و کانال‌های نوفه‌دار معرفی می‌شوند. در ادامه این کانال‌ها به‌طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرند و در انتها نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

هامیلتونی فشردگی اسپینی تک-محوری

یک سیستم متقارن با N اسپین 1/2 را در نظر بگیرید که حالت پایه و برانگیختهٔ آن به‌ترتیب به‌صورت $|0\rangle$ و $|1\rangle$ باشند. خواص این سیستم را می‌توان به‌وسیلهٔ عملگرهای مجموعه‌ای $S_\alpha = \sum_{i=1}^{N} S_{i\alpha} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sigma_{i\alpha}$ توصیف کرد که در آن σ عملگر پائولی و $\alpha = x, y, z$ است. بنابراین هامیلتونی پیچش تک-محوری به‌این صورت تعریف می‌شود [25و24]:

$$H = \lambda S_x^2 \qquad 14$$

که در آن λ ثابت جفت شدگی غیر خطی برای تمام ذرات برهم‌کنش کننده است. این عملگر کاربردهای فراوانی در نظریهٔ اطلاعات کوآنتومی دارد [26]. حالت اولیهٔ سیستم N ذره‌ای را به‌صورت حالت ضربی $|\psi(0)\rangle = |0\rangle_N = |000...0\rangle$ در نظر می‌گیریم. از آنجا که نتایج بررسی‌ها در این مقاله به‌حالت اولیه بستگی ندارد، در نظر گرفتن این حالت اولیه از عمومیت مسئله نمی‌کاهد. بنابراین بر اساس معادله شرودینگر، تحول زمانی این حالت تحت هامیلتونی14 به‌این صورت به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= \exp(-iHt)|\psi(0)\rangle \\ &= \exp(-i\omega S_x^2)|\psi(0)\rangle\end{aligned} \qquad 15$$

که در آن $\omega = \lambda t$ زاویهٔ پیچش تک-محوری است و بدون از دست دادن عمومیت مسئله آن را مساوی $\pi/8$ قرار می‌دهیم. بنابراین حالت ماتریس چگالی در زمان t به‌صورت $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ به‌دست می‌آید. حالت ماتریس چگالی N کیوبیتی که تحت جابه‌جایی متقارن است را می‌توان به‌صورت ماتریس چگالی دو کیوبیتی نوشت. عناصر این ماتریس چگالی در پایه‌های محاسباتی و برحسب مقادیر انتظاری موضعی به این صورت به‌دست می‌آیند [29-27]:

$$\begin{aligned}\rho_{11} &= \frac{1}{4}(1+\langle\sigma_{1z}\sigma_{2z}\rangle + 2\langle\sigma_{1z}\rangle) \\ \rho_{22} &= \rho_{33} = \frac{1}{4}(1-\langle\sigma_{1z}\sigma_{2z}\rangle) \\ \rho_{23} &= \rho_{32}^* = \langle\sigma_{1+}\sigma_{2-}\rangle \\ \rho_{14} &= \rho_{41}^* = \langle\sigma_{1-}\sigma_{2-}\rangle \\ \rho_{44} &= \frac{1}{4}(1+\langle\sigma_{1z}\sigma_{2z}\rangle - 2\langle\sigma_{1z}\rangle)\end{aligned} \qquad 16$$

که مقادیر انتظاری موضعی برای هامیلتونی پیچش تک-محوری به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\langle\sigma_{1z}\rangle &= -\cos^{N-1}(\frac{\omega}{2}) \\ \langle\sigma_{1+}\sigma_{2-}\rangle &= \frac{1}{8}(1-\cos^{N-2}\omega) \\ \langle\sigma_{1-}\sigma_{2-}\rangle &= \frac{-1}{8}(1-\cos^{N-2}\omega) - \\ &\quad \frac{i}{2}\sin(\frac{\omega}{2})\cos^{N-2}(\frac{\omega}{2}) \\ \langle\sigma_{1z}\sigma_{2z}\rangle &= \frac{1}{2}(1+\cos^{N-2}\omega).\end{aligned} \qquad 17$$

در این مقاله فرض می‌کنیم که حالت کوآنتومی علاوه بر هامیلتونی پیچش تک-محوری هر ذره به‌طور مستقل تحت تأثیر برهم‌کنش با محیط خود باشد. هنگامی‌که یک سیستم کوآنتومی با محیط خود برهم‌کنش می‌کند، تحول زمانی آن غیر یکانی است و از معادلهٔ شرودینگر پیروی نمی‌کند که به‌این پدیده واهمدوسی گفته می‌شود. واهمدوسی به‌روش‌های مختلفی توصیف می‌شود که در اینجا از چند مدل متداول، همچون کانال میرایی دامنه، کانال فاز-گردان و کانال میرایی فازاستفاده خواهد شد. به‌طور کلی حالت اولیه تحت واهمدوسی به‌این صورت متحول می‌شود [28]:

$$\varepsilon(\rho) = \sum_i \bigotimes_{i=1}^{N} K_i \,\rho \bigotimes_{i=1}^{N} K_i^{\dagger}. \qquad 18$$

به‌این معادله، معادلهٔ بورن-مارکو-لیندبلاد گفته می‌شود و یکی از معروف‌ترین مدل‌هایی است که تحول زمانی

کیوبیت‌های برهم‌کنش کننده با محیط خود را توصیف می‌کند. همچنین در این معادله K_i عملگر کراوس برای کیوبیت iام است. در ادامه چند نوع از این عملگرها که مربوط به محیط‌های مختلف است را معرفی و مطالعه خواهیم کرد.

کانال میرایی دامنه

کانال میرایی دامنهٔ افت انرژی را در یک سیستم کوآنتومی توصیف می‌کند. عملگرهای کراوس برای این کانال به‌این صورت توصیف می‌شوند:

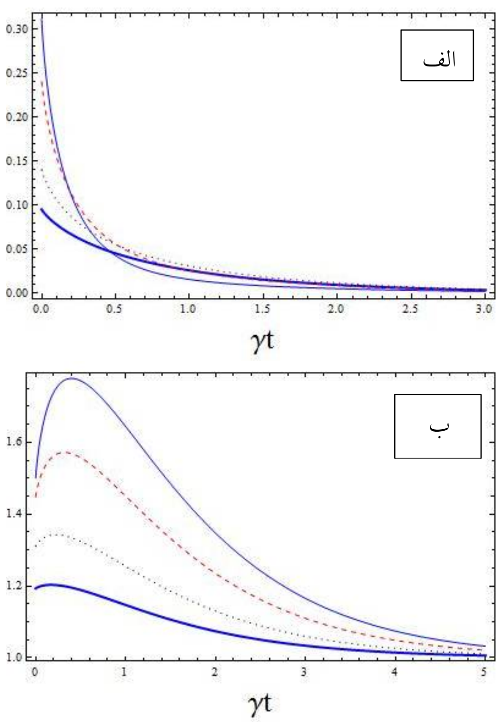
$$K_0=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{1-p} & 0 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

$$K_1=\begin{bmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

که در آن $p=\exp(-\gamma t)$ است. بنابراین با توجه به‌روابط فوق و 18 عناصر غیر صفر ماتریس چگالی در زمان t به‌این صورت به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&\rho_{11}=\frac{1}{4}p^2(1+2\langle\sigma_{1z}\rangle+\langle\sigma_{1z}\sigma_{2z}\rangle),\\
&\rho_{22}=\rho_{33}=-\frac{1}{4}p(-2(1+\langle\sigma_{1z}\rangle)+\\
&\qquad p(1+2\langle\sigma_{1z}\rangle+\langle\sigma_{1z}\sigma_{2z}\rangle)),\\
&\rho_{14}=\rho_{41}^*=p\langle\sigma_{1-}\sigma_{2-}\rangle,\\
&\rho_{23}=\rho_{32}^*=p\langle\sigma_{1+}\sigma_{2-}\rangle,\\
&\rho_{44}=\frac{1}{4}(4-4p(1+\langle\sigma_{1z}\rangle)+\\
&\qquad p^2(1+2\langle\sigma_{1z}\rangle+\langle\sigma_{1z}\sigma_{2z}\rangle)).
\end{aligned} \tag{21}$$

همان‌طور که قبلاً بیان شد در این مقاله تحول زمانی ناهم‌خوانی کوآنتومی و سمت راست رابطهٔ آنتروپی عدم قطعیت3، بررسی و با یکدیگر مقایسه می‌شوند. بنابراین با جای‌گذاری ماتریس چگالی21 در 3 و 9 به‌ترتیب آنتروپی عدم قطعیت و ناهمخوانی کوآنتومی در طی زمان به‌دست می‌آیند. در شکل1 نمودار تحول زمانی ناهمخوانی کوآنتومی و سمت راست رابطهٔ3 برای تعداد ذرات متفاوت N رسم شده است. همان‌طور که در این شکل نشان داده شده است، با افزایش تعداد ذرات در لحظه $t=0$ ناهمخوانی کوآنتومی و آنتروپی عدم قطعیت هر دو افزایش می‌یابند. با گذشت زمان ناهمخوانی کوآنتومی کاهش می‌یابد تا کاملاً از بین برود. در مورد سمت راست نامساوی3، با گذشت زمان عدم قطعیت ابتدا افزایش می‌یابد تا به یک مقدار بیشینه برسد. این مقدار بیشینه با افزایش تعداد ذرات، افزایش می‌یابد و سپس کاهش می‌یابد تا به یک مقدار کمینه برسد. این مقدار کمینه برای تمام تعداد ذرات، یکسان و مخالف صفر است. بنابراین در این وضعیت مشاهده‌پذیرهای ناسازگار را نمی‌توان با قطعیت اندازه‌گیری کرد.



شکل1الف. تحول زمانی ناهمخوانی کوآنتومی تحت تأثیر هامیلتونی پیچش تک-محوری و کانال میرایی دامنه برای $\omega=\pi/8$ و خط $N=10$، نقطه $N=20$، خط فاصله $N=50$ و خط نازک $N=1000$. **ب.** تحول زمانی حد پایین نامساوی آنتروپی عدم قطعیت در حضور حافظه کوآنتومی تحت تأثیر هامیلتونی پیچش تک-محوری و

کانال میرایی دامنه برای $\omega = \pi / 8$ و خط $N=10$، نقطه $N=20$، خط فاصله $N=50$ و خط نازک $N=1000$.

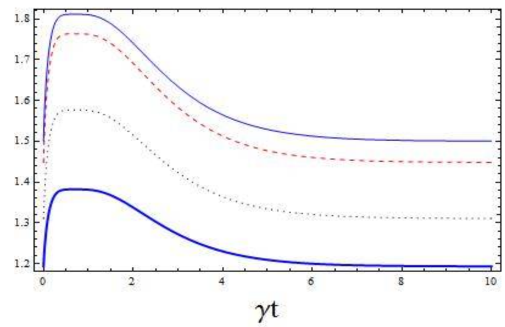
کانال فاز-گردان

عملگرهای کراوس برای این کانال به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$K_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & -\sqrt{p} \end{bmatrix}, \qquad 22$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{bmatrix}. \qquad 23$$

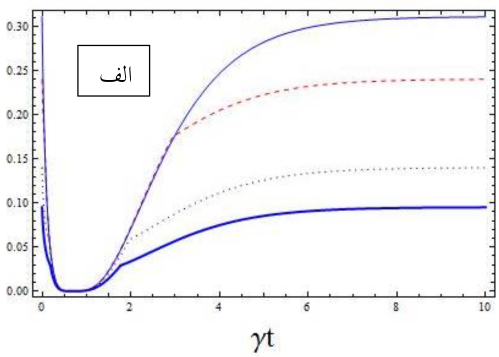
با جای‌گذاری معادلات فوق در 18 عناصر غیر صفر ماتریس چگالی به‌این صورت به‌دست می‌آیند:



$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \frac{1}{4}(1 + 2\langle \sigma_{1z} \rangle + \langle \sigma_{1z}\sigma_{2z} \rangle), \\ \rho_{22} &= \rho_{33} = \frac{1 - \langle \sigma_{1z}\sigma_{2z} \rangle}{4}, \\ \rho_{14} &= \rho_{41}^* = (1-2p)^2 \langle \sigma_{1-}\sigma_{2-} \rangle, \\ \rho_{23} &= \rho_{32}^* = (1-2p)^2 \langle \sigma_{1+}\sigma_{2-} \rangle, \\ \rho_{44} &= \frac{1}{4}(1 - 2\langle \sigma_{1z} \rangle + \langle \sigma_{1z}\sigma_{2z} \rangle). \end{aligned} \qquad 24$$

مانند مورد قبل با جای‌گذاری ماتریس چگالی 24 در روابط3 و 9 به‌ترتیب حد پایین آنتروپی عدم قطعیت و ناهمخوانی کوآنتومی به‌دست می‌آیند. همانند مورد قبل در زمان اولیه، عدم قطعیت و همبستگی کوآنتومی رفتار یکسانی از خود نشان می‌دهند. اما با گذشت زمان رفتار آنها عکس یکدیگر است. همان‌طور که در شکل2 نشان داده شده است، با افزایش زمان همبستگی کوآنتومی کاهش می‌یابد تا کاملاً از بین برود اما پس از یک بازه زمانی افزایش می‌یابد تا پس از یک مدت زمان نسبتاً کوتاه به یک مقدار ثابت برسد. این مقدار ثابت، همان‌طور که در شکل2الف نشان داده شده است، برای تعداد ذرات بیشتر، بزرگ‌تر است.

بر خلاف رفتار همبستگی کوآنتومی، آنتروپی عدم قطعیت با گذشت زمان ابتدا افزایش می‌یابد و با رسیدن به‌یک مقدار بیشینه سپس کاهش می‌یابد تا به‌یک مقدار ثابت برسد. همان‌طور که در شکل2ب نشان داده شده است، این مقدار ثابت با افزایش تعداد ذرات افزایش پیدا می‌کند.



شکل2الف. تحول زمانی ناهم‌خوانیکوآنتومی تحت تأثیر هامیلتونی پیچش تک-محوری و کانال فاز گردان برای $\omega = \pi / 8$ و خط $N=10$، نقطه $N=20$، خط فاصله $N=50$ و خط نازک $N=1000$. **ب.** تحول زمانی حد پایین نامساوی آنتروپی عدم قطعیت در حضور حافظهٔکوآنتومی تحت تأثیر هامیلتونی پیچش تک-محوری و کانال فاز گردان برای $\omega = \pi / 8$ و خط $N=10$، نقطه $N=20$، خط فاصله $N=50$ و خط نازک $N=1000$.

کانال میرایی فاز

در این نوع کانال، همدوسی اطلاعات فاز کوآنتومی بدون افت انرژی از بین می‌رود. عملگرهای کراوس به‌این صورت تعریف می‌شوند:

$$K_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{bmatrix}, \qquad 25$$

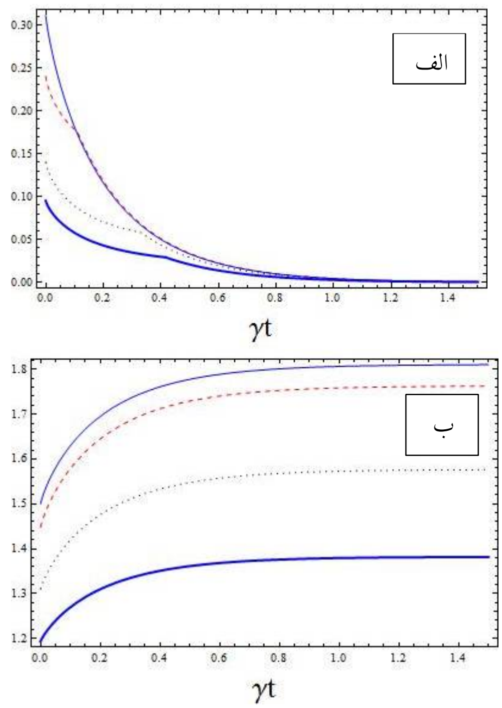
$$K_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (26)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{bmatrix}. \qquad (27)$$

با جای‌گذاری روابط اخیر در رابطهٔ18، عناصر غیر صفر ماتریس چگالی به‌شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \frac{1}{4}(1+2\langle\sigma_{1z}\rangle+\langle\sigma_{1z}\sigma_{2z}\rangle), \\ \rho_{22} &= \rho_{33} = \frac{1-\langle\sigma_{1z}\sigma_{2z}\rangle}{4}, \\ \rho_{14} &= \rho_{41}^* = p^2\langle\sigma_{1-}\sigma_{2-}\rangle, \\ \rho_{23} &= \rho_{32}^* = p^2\langle\sigma_{1+}\sigma_{2-}\rangle, \\ \rho_{44} &= \frac{1}{4}(1-2\langle\sigma_{1z}\rangle+\langle\sigma_{1z}\sigma_{2z}\rangle) \end{aligned} \qquad (28)$$

و از این ماتریس چگالی می‌توان آنتروپی عدم قطعیت و همبستگی کوآنتومی را به‌دست آورد. با بررسی شکل 3 که تحول زمانی ناهمخوانی کوآنتومی و حد پایین آنتروپی عدم قطعیت را نشان می‌دهد، همانند موارد قبل می‌توان نتیجه گرفت که در لحظهٔ شروع یعنی $t=0$، همبستگی کوآنتومی و عدم قطعیت با رشد تعداد ذرات، بزرگ می‌شوند. در این مورد نیز آنتروپی عدم قطعیت در طی زمان برخلاف همبستگی کوآنتومی رفتار می‌کند. به‌طوری‌که با افزایش زمان ناهمخوانی کوآنتومی کاهش می‌یابد تا سرانجام به صفر برسد. اما آنتروپی عدم قطعیت افزایش می‌یابد تا در نهایت به یک مقدار ثابت دست پیدا کند. این مقدار ثابت به تعداد ذرات بستگی دارد و با افزایش تعداد ذرات این مقدار نیز افزایش پیدا می‌کند.



شکل3 الف. تحول زمانی ناهمخوانی کوآنتومی تحت تأثیر هامیلتونی پیچش تک-محوری و کانال میرایی فاز برای $\omega=\pi/8$ و خط $N=10$، نقطه $N=20$، خط فاصله $N=50$ و خط نازک $N=1000$. ب. تحول زمانی حد پایین نامساوی آنتروپی عدم قطعیت در حضور حافظه کوآنتومی تحت تأثیر هامیلتونی پیچش تک-محوری و کانال میرایی فاز برای $\omega=\pi/8$ و خط $N=10$، نقطه $N=20$، خط فاصله $N=50$ و خط نازک $N=1000$.

لازم به‌ذکر است که مقدار ω تأثیری در رفتار کمیت‌های بررسی شده ندارد و فقط مقدار اولیه آنها را در لحظهٔ شروع تغییر می‌دهد. بنابراین همانطور که قبلاً بیان شد مقدار آن را در این مقاله ثابت در نظر گرفتیم.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله یک سیستم Nکیوبیتی متقارن را در نظر می‌گیریم که تحت هامیلتونی پیچش تک-محوری و کانال‌های نوفه‌دار متحول می‌شود. سپس با بررسی تحول زمانی همبستگی کوآنتومی و حد پایین رابطه آنتروپی عدم قطعیت، نشان می‌دهیم که در زمان $t=0$، این کمیت‌ها هر دو با افزایش تعداد ذرات، افزایش

می‌یابند. با گذشت زمان مقدار همبستگی کوآنتومی در کانال‌های میرایی دامنه و میرایی فاز کم می‌شود تا در زمان‌های طولانی به‌صفر میل کند. اما در کانال فاز-گردان، همبستگی کوآنتومی پس از کاهش و صفر شدن در یک بازهٔ زمانی، افزایش پیدا می‌کند تا به‌یک مقدار ثابت برسد.

رفتار حد پایین رابطهٔ آنتروپی عدم قطعیت در طی زمان بر خلاف همبستگی کوآنتومی است. به‌طوری‌که با گذشت زمان این کمیت در کانال‌های میرایی دامنه و میرایی فاز ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد تا به یک مقدار ثابت غیر صفر برسد. در مورد کانال فاز-گردان، عدم قطعیت در اندازه‌گیری مشاهده‌پذیرهای ناسازگار افزایش می‌یابد تا به یک مقدار ثابت برسد.

به‌طور کلی مقادیر ثابتی که کمیت‌های مورد بحث به آنها دست پیدا می‌کنند به تعداد ذرات سیستم بستگی دارند.

مرجع‌ها

[1] W. Heisenberg, Mehrkörperproblem und Resonanz in der Quantenmechanik, *Zeitschrift für Physik* **43** (1927) 172. https://doi.org/10.1007/BF01397160

[2] H.P. Robertson, The uncertainty principle, *Physical Review* **34** (1929) 163. https://doi.org/10.1103/PhysRev.34.163

[3] K. Kraus, Complementary observables and uncertainty relations, *Physical Review D* **35** (1987) 3070. https://doi.org/10.1103/physrevd.35.3070

[4] H. Maassen, J.B.M. Uffink, Generalized entropic uncertainty relations, *Physical Review Letters* **60** (1988) 1103. https://doi.org/10.1103/physrevlett.60.1103

[5] M. Berta, M. Christandl, R. Colbeck, M.J. Renes, R. Renner, The uncertainty principle in the presence of quantum memory, *Nature Physics* **6** (2010) 659. https://doi.org/10.1038/nphys1734

[6] R. Prevedel, D.R. Hamel, R.Colbeck, K. Fisher, K.J. Resch, Experimental investigation of the uncertainty principle in the presence of quantum memory and its application to witnes singent anglement, *Nature Physics***7**(2011) 757. https://doi.org/10.1038/nphys2048

[7] C.F. Li, J.S.Xu, X.Y. Xu, K. Li, G.C. Guo, Experimental investigation of the entanglement assisted entropic uncertainty principle, *Nature Physics***7** (2011) 752. https://doi.org/10.1038/nphys2047

[8] K. Modi, A. Brodutch, H. Cable, T. Paterek, V. Vedral, The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures, *Reviews of Modern Physics* **84**, (2012) 1655. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.84.1655

[9] L. Henderson, V. Vedral, Classical, quantum and total correlations, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **34** (2001)6899. https://doi.org/10.1088/0305-4470/34/35/315

[10] H. Ollivier, W.H. Zurek, Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations, *Physical Review Letters* **88** (2001) 017901. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.017901

[11] W.K. Wootters, Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits, *Physical Review Letters* **80** (1998) 2245. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245

[12] M.R. Pourkarimi, M. Rahnama, H. Rooholamini, Decoherence effect on quantum correlation and entanglement in a two-qubit spin chain, *International Journal of Theoretical Physics* **54** (2015) 1085. https://doi.org/10.1007/s10773-014-2302-7

[13] M.R. Pourkarimi, M.Rahnama, Quantum teleportation under the effect of dissipative environment and Hamiltonian XY model, *International Journal of*

[21] AJ. Huang, D. Wang, J.M. Wang, et al, Exploring entropic uncertainty relation in the Heisenberg XX model with inhomogeneous magnetic field, *Quantum information Processing* **16** (2017) 204. https://doi.org/10.1007/s11128-017-1657-0

[22] M.R. Pourkarimi, Quantum correlations and entropic uncertainty relation in a three-qubit spin chain under the effect of magnetic field and DM interaction, *International Journal of Quantum Information* **16** (2018) 1850057. https://doi.org/10.1142/S0219749918500570

[23] S. Haddadi, M.R. Pourkarimi, A. Akhound, M. Ghominejad, Quantum correlations and quantum-memory-assisted entropicuncertainty relation in two kinds of spin squeezing models, *Laser Physics Letters* **16** (2019) 095202. https://doi.org/10.1088/1612-202X/ab2cc7

[24] M. Jafarpour, A. Akhound, Entanglement and squeezing of multi-qubit systems using a two-axis countertwisting Hamiltonian with an external field, *Physics Letters A* **372** (2008) 2374. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.12.021

[25] M. Kitagawa, M. Ueda, Sgueezed spin states, *Physical Review A* **47**(1993) 5138. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.47.5138

[26] M.F. Riedel, P. Böhi, Y. Li, T.W. Hänsch, A.Sinatra, P. Treutlein, Atom-chip-based generation of entanglement for quantum metrology, *Nature* **464** (2010) 1170. https://doi.org/10.1038/nature08988

[27] X.G. Wang, K. Mølmer, Pairwise entanglement in symmetric multi-qubit systems, *The European Physical Journal D* **18** (2002) 385. https://doi.org/10.1140/epjd/e20020045

[28] YN. Guo, K. Zeng, GY. Wang, Pairwise quantum discord for a symmetric multi-qubit system in different types of noisy channels, *Theoretical Physics* **53** (2014) 1415. https://doi.org/10.1007/s10773-013-1938-z

[14] M.R. Pourkarimi, The dynamics of quantum correlations in multi-qubit spin chainsunder the effect of Dzyaloshinskii-Moriya interaction, *International Journal of Theoretical Physics* **57** (2018) 1158. https://doi.org/10.1007/s10773-017-3646-6

[15] M. Jafarpour, M.R. Pourkarimi, A. Akhound, Entanglement sudden death and itssuppression inmulti-qubit channels, using a magnetic field, *IL Nuovo Cimento B* **124** (2009) 269. https://doi.org/10.1393/ncb/i2009-10762-2

[16] S. Bose, Quantum communication through an unmodulated spin chain, *Physical Review Letters* **91** (2003)207901.

[17] A. Akhound, S. Haddadi, M.A. Chaman Motlagh, Bipartite and multipartite entanglement in entangled graphs, *Journal of research on Many-body systems*, **8** (19), 1-10 https://dx.doi.org/10.22055/jrmbs.2018.13972

[18] S. Ghanavati, M. Jafarpour, Calculating the ground state entanglement of a two-dimensional spin star lattice, *Journal of research on Many-body systems*, **8** (17), 135-143 https://dx.doi.org/10.22055/jrmbs.2018.13894

[19] H. Varghese, M. Ravendranadhan, Quantum entanglement and generalized uncertaintyrelations, *arXiv*: 1706.09377v1 [quant-ph] (2017). https://arxiv.org/abs/1706.09377

[20] D. Wang, A. Huang, F. Ming, W. Sun, H. Lu, C. Liu, L. Ye, Quantum-memory-assisted entropic uncertainty relation in a Heisenberg XYZ chain with an inhomogeneous magnetic field, *Laser Physics Letters* **14** (2017) 065203. https://doi.org/10.1088/1612-202X/aa6f85

International Journal of Theoretical Physics **55** (2016) 2894. https://doi.org/10.1007/s10773-016-2920-3

[29] G.X. Wang, B.C. Sander, Spin squeezing and pairwise entanglement for symmetric multiqubit states, *Physical Review A* **68** (2003) 012101. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.68.012101