

EXTENDED ABSTRACT

Obtaining gradually varied flow profile in trapezoidal and triangular channels using semi-analytical method of Adomian decomposition

H. R. Zarif Sanayei^{1*}, R. Kamgar² and N. Sheini Shahvand³

*1**-Corresponding Author, Assistant Professor, Faculty of Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran (Zarif@sku.ac.ir)

2- Assistant Professor, Faculty of Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran.

3- Master of science student of Water and Hydraulic Structures, Shahrekord University, Shahrekord, Iran.

ARTICLE INFO

Article history:

Received: 3 June 2019

Revised: 11 November 2019

Accepted: 16 November 2019

Keywords:

Flow Depth, Channel, Finite Difference Method, Ordinary Differential Equation, ADM.

TO CITE THIS ARTICLE:

Zarif Sanayei, H., Kamgar, R., Sheini Shahvand, N. (2021). 'Obtaining gradually varied flow profile in trapezoidal and triangular channels using semi-analytical method of Adomian decomposition', *Irrigation Sciences and Engineering*, 44(1), pp. 17-31. doi: 10.22055/jise.2019.29619.1847

Introduction

The non-uniform flow in a prismatic channel with gradual changes in the free water surface level is called the gradually varied flow (GVF). Calculation of the GVF profiles over the last century has become a significant topic for the researchers in the relevant fields. To obtain this profile, the nonlinear ordinary differential equation of the GVF needs to be solved. This can be carried out either numerically or analytically. Although several studies have been conducted on the GVF in open channels in various forms (Jan & Chen, 2013; Vatankhah, 2010, 2015; Homayoon & Abedini, 2019), the number of semi-analytical studies in the field of gradual variable flow in trapezoidal and triangular channels is limited, which requires further investigation. In this research, the Adomian Decomposition Method (ADM) is used to find a semi-analytical solution for solving the GVF equation in the triangular and trapezoidal prismatic channels. In this method, the Manning equation is used as the resistance equation. Moreover, for the aim of verifying the semi-analytical solutions, the ADM results are compared with the finite difference method (FDM). The presented semi-analytical solutions in this paper can be used to validate other numerical methods in similar studies.

Methods

Obtaining a GVF profile is a crucial issue in the field of hydraulic engineering which can be obtained by solving the GVF equation. In the present study, the ADM (Adomian, 1986) is used as a semi-analytical method for the solution of this equation and then the GVF profile is plotted by the ADM result. For this purpose, the triangular and trapezoidal channels with the Manning equation as the resistance equation are investigated. The ADM is a semi-analytical method for solving nonlinear ordinary and partial differential equations. The ADM does not require any linearization of the GVF equation and can be used very simply for solving the nonlinear equation.

Results and discussion

The semi-analytic solutions presented in this paper are investigated by applied examples at the triangular and trapezoidal channels. In addition, for the verification of the semi-analytical solutions, the ADM results are compared with the finite difference method (FDM). Fig. (1A) shows the GVF profile for the six-term approximation of the ADM at the triangular channel. As shown, the ADM

profile is in good agreement with the FDM profile, which indicates high accuracy of the semi-analytic method. Also, Fig. (1B) shows the GVF profile for the six-term approximation of the ADM at the trapezoidal channel. As seen, the ADM profile is exactly coincident with the FDM profile and it shows that the ADM has very high accuracy for the GVF profile in this channel.

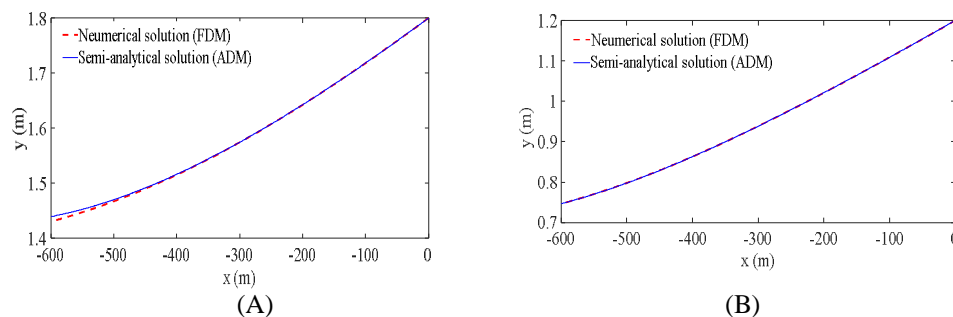


Fig. 1- Comparison of the ADM and FDM profiles in A) The triangular channel B) The trapezoidal channel

Conclusion

In this paper, the semi-analytical solutions using the ADM are presented for the triangular and trapezoidal channels. The results of the GVF profile in the applied examples have been presented for the four-, five- and six-term approximation of the ADM. For the verification of the semi-analytical solutions, these profiles have been compared with the FDM profiles. It has been concluded that the six-term approximation of the ADM are in good agreement with the FDM results. Therefore, these semi-analytical solutions in this research can be used for obtaining the GVF profile in the triangular and trapezoidal channels. Furthermore, the ADM method proposes a solution of the GVF equation as a continuous function, while the numerical method presents the water depth values in a discontinuous manner along the channel.

Acknowledgment

The current study was conducted at the Faculty of Engineering of Shahrekord University and the authors of this paper express their gratitude and appreciation to the faculty.

References

- 1- Adomian, G., 1986. *Nonlinear stochastic operator equations*. Academic Press.
- 2- Homayoon, L. and Abedini, M.J., 2019. Development of an analytical benchmark solution to assess various gradually varied flow computations. *Journal of Hydraulic Engineering*. <https://doi.org/10.1080/09715010.2018.1563872>.
- 3- Jan, C.D. and Chen, CL., 2013. Gradually varied open-channel flow profiles normalized by critical depth and analytically solved by using Gaussian hypergeometric functions. *Hydrology and Earth System Sciences*, 17(3), pp. 973–987.
- 4- Vatankhah, A.R., 2010. Analytical integration of the equation of gradually varied flow for triangular channels. *Flow Measurement and Instrumentation*, 21(4), pp. 546–549.
- 5- Vatankhah, A.R., 2015. Analytical solution of gradually varied flow equation in circular channels using variable Manning coefficient. *Flow Measurement and Instrumentation*, 43, pp. 53-58.





به دست آوردن پروفیل جریان متغیر تدریجی در کانال‌های ذوزنقه‌ای و مثلثی به کمک روش نیمه تحلیلی تجزیه آدومین

حامد رضا ظریف صناعی^{1*}، رضا کامگار² و نسترن شینی شاهوند³

1- نویسنده مسئول، استادیار دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران، Zarif@sku.ac.ir

2- استادیار دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

3- دانشجوی کارشناسی ارشد آب و سازه هیدرولیکی دانشکده مهندسی دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

پذیرش: 1398/8/25

بازنگری: 1398/8/20 دریافت: 1398/3/13

چکیده

محاسبه‌ی پروفیل جریان‌های متغیر تدریجی در کانال‌ها، امری بسیار مهم است زیرا طراحی ابعاد کانال نیازمند دانستن عمق آب در جریان متغیر تدریجی است. به منظور به دست آوردن این پروفیل باید معادله دیفرانسیل جریان متغیر تدریجی حل شود؛ تا عمق جریان در طول کانال مشخص شود. در این مقاله با استفاده از روش تجزیه آدومین (Adomian Decomposition Method) یا ADM یک حل نیمه تحلیلی برای حل معادله جریان متغیر تدریجی در کانال‌های منشوری مثلثی و ذوزنقه‌ای ارائه شده است. نتایج این حل‌های نیمه تحلیلی با نتایج روش عددی تفاضل محدود (Finite Difference Method) یا FDM برای چند مثال در کانال‌های مثلثی و ذوزنقه‌ای مقایسه گردیده است. به طوری که ابتدا نتایج پروفیل برای سه تقریب چهار جمله، پنج جمله و شش جمله موجود در روش آدومین در هر کانال ارائه شده است و سپس نتایج هر تقریب با نتایج پروفیل به دست آمده از روش عددی تفاضل محدود مقایسه شده است. پروفیل‌های روش آدومین تطابق خوبی را با پروفیل‌های روش تفاضل محدود نشان می‌دهد به طوری که درصد خطای حداکثر پروفیل جریان متغیر تدریجی روی شیب ملایم از روش آدومین تقریب شش جمله با روش تفاضل محدود در کانال مثلثی 0/51 درصد و در کانال ذوزنقه‌ای 0/02 درصد می‌باشد. همچنین دو مثال نیز از پروفیل جریان متغیر تدریجی در کانال‌های مثلثی و ذوزنقه‌ای برای شیب تند ارائه شده است. درصد خطای حداکثر در این حالت نیز میان روش آدومین تقریب شش جمله و روش تفاضل محدود برای کانال مثلثی 0/11 درصد و در کانال ذوزنقه‌ای 0/22 درصد می‌باشد.

کلیدواژه‌ها: عمق جریان، کانال، روش تفاضل محدود، معادله دیفرانسیل معمولی، روش ADM.

مقدمه

جریان غیریکنواخت در یک کانال منشوری با تغییرات تدریجی در ارتفاع سطح آزاد آب، جریان متغیر تدریجی نامیده می‌شود. تقریباً تمام فعالیت‌های مهم مهندسی هیدرولیک در زمینه‌ی جریان کانال‌های باز، شامل محاسبه‌ی عمق پروفیل جریان متغیر تدریجی می‌شود (Zaghloul and Anwar, 1991). پروفیل سطح آب در جریان متغیر تدریجی برای مهندسی سازه هیدرولیکی اهمیت زیادی دارد. در بسیاری از کارها و مشکلات عملی، محاسبه‌ی دقیق ارتفاع آب در بخش‌های مختلف کانال مورد نیاز است. محاسبه‌ی پروفیل جریان متغیر تدریجی در طول قرن گذشته موضوع مهمی بوده است. این روش می‌تواند به صورت عددی یا تحلیلی انجام شود. روش‌های عددی که برای حل معادله جریان متغیر تدریجی در کانال‌ها ارائه شده‌اند به صورت حل ناپیوسته می‌باشند بدین معنی که فقط حل مسئله را در نقاط گره از یک شبکه بندی در طول کانال ارائه می‌دهند. به همین دلیل حل‌های تحلیلی و نیمه تحلیلی از این منظر که یک دید بهتری برای جواب مسئله را نسبت به حل‌های ناپیوسته

عددی ارائه می‌دهند، بسیار مناسب می‌باشند. به علاوه این که، حل‌های تحلیلی و نیمه تحلیلی می‌توانند به عنوان یک حل مرجع به منظور آزمایش کردن الگوریتم‌های روش‌های عددی و کد نویسی مورد استفاده قرار گیرند. معادله‌ی جریان متغیر تدریجی عمدتاً در کانال‌های غیرمنشوری استفاده می‌شود. در کانال‌های منشوری بهتر است که معادله‌ی جریان متغیر تدریجی به یک فرم بدون بعد ساده سازی شود و سپس معادله‌ی ساده شده با استفاده از یکی از روش‌های تحلیلی، نیمه تحلیلی یا عددی ترکیب شود (Vatankhah, 2015).

اگرچه مطالعه‌های متعددی در زمینه‌ی جریان متغیر تدریجی در کانال‌های باز با اشکال مختلف انجام شده است (از جمله‌ی آن‌ها؛ Jan and Chen, 2013; Vatankhah, 2010a, 2011a)، اما مطالعات نیمه تحلیلی در زمینه‌ی جریان‌های متغیر تدریجی در کانال‌های ذوزنقه‌ای و مثلثی محدود می‌باشد. Vatankhah (2010b) راه حل‌های تحلیلی را برای کانال مستطیلی عریض با استفاده از فرمول مانینگ ارائه داد. Hager (2010) از تقریب‌های مختلف برای ارائه‌ی راه حل‌های تقریبی

محاسبه‌ی پروفیل جریان متغیر تدریجی در کانال‌های منشوری دوزنقه‌ای و مثلثی استفاده شده است. روش تجزیه آدومین، جواب تحلیلی مسئله‌های غیرخطی را در شرایطی ارائه می‌دهد که در شروع فرایند حل مسئله هیچ‌گونه تغییری در معادله حاکم و یا ساده‌سازی و خطی‌سازی انجام نمی‌شود و پس از انجام فرایند حل، جواب نهایی مسئله غیرخطی را ارائه می‌دهد. این در حالی است که دیگر روش‌های تحلیلی و نیمه‌تحلیلی حتماً می‌بایستی یک فرایند ساده‌سازی و خطی‌سازی را انجام دهند و سپس جواب نهایی را ارائه دهند. لذا از این نظر، ADM حل‌های کاملاً واقع‌بینانه و بسیار نزدیک به واقعیت را ارائه می‌دهد و این از نقاط قوت بزرگ این روش نسبت به سایر روش‌های تحلیلی و نیمه‌تحلیلی می‌باشد. حل‌های ADM را می‌توان برای هر ابعاد کانال (کانال با عرض کف عریض و غیرعریض) و با هر شیب کناری کانال از جمله شیب‌های اعداد صحیح مثلاً یک به $1/5$ نیز استفاده کرد. در مقاله حاضر با توجه به ارائه تابع واضح ریاضی عمق برحسب فاصله، می‌توان در هر نقطه و یا به عبارت دیگر در همه نقاط در طول کانال عمق آب را به دست آورد و مشخص کردن طول پروفیل در بین دو نقطه با عمق مشخص، تنها بخشی از حل نیمه‌تحلیلی ارائه شده در تحقیق حاضر می‌باشد. حل‌های ارائه شده در این روش به صورت سری می‌باشند که این سری‌ها بسیار سریع هم‌گرا می‌شوند و زمانی که با حل‌های عددی مقایسه می‌شوند، مسئله هم‌گرایی آن‌ها به خوبی نمایش داده می‌شود. این موضوع نیز در مقاله حاضر بررسی شده است.

مواد و روش‌ها

یافتن پروفیل جریان متغیر تدریجی امری بسیار مهم و حایز اهمیت در علم مهندسی هیدرولیک می‌باشد که این کار نیز با حل معادله جریان متغیر تدریجی امکان‌پذیر است. راه‌کارهای متعددی برای حل این معادله اعم از راه کار عددی، تحلیلی و نیمه‌تحلیلی وجود دارد. در تحقیق حاضر از روش ADM تحت‌عنوان یک روش نیمه‌تحلیلی برای حل معادله و یافتن پروفیل جریان استفاده شده است. این روش برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و دیفرانسیل جزئی، خطی و غیرخطی به کار برده می‌شود و بیشتر در سیستم‌های متغیر با زمان با استفاده از انتگرال Ito قابل‌تعمیم است (Adomian, 1986). جنبه‌ی حیاتی این روش به کارگیری چندجمله‌ای‌های آدومین می‌باشد که برای هم‌گرایی بخش غیرخطی معادله، بدون خطی کردن سیستم این کار را انجام می‌دهد. این چندجمله‌ای‌های ریاضی به سری مک لورن تعمیم داده می‌شوند که این روش انعطاف‌پذیرتر از بسط سری تیلور می‌باشد.

معادله‌های حاکم

جریان متغیر تدریجی

با در نظر گرفتن توزیع فشار هیدرو استاتیک در هر بخش، شیب طولی کوچک، نفوذ هوا در آب ناچیز (وزن مخصوص ثابت

برای معادله‌ی متغیر تدریجی در کانال دایره‌ای استفاده کرد. Vatankhah (2011b) با استفاده از فرمول مانینگ یک راه‌حل شبه تحلیلی برای محاسبه‌ی طول پروفیل جریان متغیر تدریجی در کانال‌های دوزنقه‌ای استفاده کرد، که در این روش برای محاسبه‌ی پروفیل سطح آب از یک مرحله استفاده شده است. Jan (2014) از یک راه‌حل تحلیلی با استفاده از انتگرال مستقیم و تابع هندسی گاوسین برای پروفیل‌های جریان متغیر تدریجی استفاده کرد. Vatankhah (2015) راه‌حل تحلیلی برای محاسبه‌ی جریان متغیر تدریجی در کانال‌های دایره‌ای با استفاده از ضریب مانینگ ارائه نمود. در تحقیق دیگری Desatnik و Qassim (2017) یک راه‌حل تحلیلی دقیق برای محاسبه‌ی جریان متغیر تدریجی یکنواخت تک‌بعدی در کانال‌های باز ارائه کردند که به علت سهولت محاسبات، این روش نسبت به روش‌های دیگر مزیت دارد. Homayoon و Abedini (2019) یک راه‌حل به فرم بسته برای کانال‌های مستطیلی معمولی و مثلثی در جریان‌های متغیر تدریجی با استفاده از فرمول مانینگ (به‌عنوان معادله‌ی پایدار) بدون هیچ‌گونه تقریبی در معادله‌ی حاکم استخراج کردند. مقطع مثلثی به هنگام استفاده به‌عنوان مادی یا جوی آبیاری کاربرد عملی دارد (Achour and Debabeche, 2003). کانال‌های باز دوزنقه‌ای، به‌طور گسترده برای زهکشی، آبیاری، روان‌آب شهری و انتقال آب استفاده می‌شوند (Das, 2007).

با این حال ارائه حل‌های تحلیلی و یا نیمه‌تحلیلی به‌خصوص در زمینه‌ی کانال‌های مثلثی و دوزنقه‌ای از جمله مواردی است که در تحقیقات قبل به آن کمتر پرداخته شده است (با توجه به خصوصیات هندسی پیچیده آن‌ها و استفاده از معادله مانینگ در شیب‌خط انرژی). هم‌چنین با توجه به این‌که حل‌های موجود نیز شامل ساده‌سازی‌های زیادی در خود معادله حاکم هستند، لذا ارائه راه‌حل تحلیلی و نیمه‌تحلیلی جدید برای ارائه پروفیل سطح آب در این کانال‌ها بدون هیچ‌گونه ساده‌سازی و خطی‌سازی که بتواند به‌عنوان یک حل مرجع مورد استفاده قرار گیرد، بسیار مهم می‌باشد. اکثر حل‌های تحلیلی موجود در تحقیقات قبل کانال‌های مستطیلی عریض، دایره‌ای و پارابولیک را بررسی کرده‌اند و آن هم در خیلی موارد تنها به دست آوردن طول پروفیل در بین دو عمق مشخص از آب در طول کانال را مطالعه کرده‌اند. از جمله ساده‌سازی‌های دیگر تحقیقات قبلی برای کانال دوزنقه‌ای، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد عرض کف کانال عریض‌تر گرفته شده است و برای شیب‌های کناری کانال از اعداد صحیح مثلاً شیب یک به دو، استفاده شده است. هم‌چنین در اکثر تحقیقات گذشته برای کانال‌های مثلثی و دوزنقه‌ای، تنها می‌توان طول پروفیل جریان متغیر تدریجی را در بین دو نقطه با عمق مشخص به دست آورد و قادر به ارائه پروفیل و یا به عبارت دیگر معادله سطح آب در طول کانال نیست.

در این تحقیق از روش شبه تحلیلی تجزیه آدومین (Adomian Decomposition Method) یا ADM برای

L یک عملگر خطی به عنوان یک قسمت از F در معادله (4) می باشد به طوری که L معکوس پذیر نیز می باشد، بدین معنی که اگر L به عنوان مثال $\frac{d}{dx}$ باشد، می تواند از آن عکس عمل مشتق را انجام داد یعنی یک مرتبه قابل انتگرال گیری نسبت به x می باشد و یا اگر L به عنوان مثال $\frac{d^2}{dx^2}$ باشد، می تواند این قابلیت را داشته باشد که دو بار از آن عکس عمل مشتق یعنی انتگرال گیری نسبت به x شود. در معادله (5) یک عملگر خطی می باشد که برای باقی مانده قسمت خطی f روی y اعمال می شود. در نهایت N در معادله (5)، یک عملگر غیرخطی می باشد یا به عبارتی N شامل فرم های غیرخطی F می باشد. اگر چنانچه عملگر N در مسئله $\frac{d}{dx}$ باشد، اکنون با اعمال کردن معکوس عملگر L یا L^{-1} (همان انتگرال گیری می باشد) که در اینجا L عبارت است از $\frac{d}{dx}$ در طرفین معادله (5) خواهیم داشت:

$$L^{-1}Ly = L^{-1}f - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny \quad (6)$$

از آنجایی که انتگرال گیری همراه با ثابت انتگرال گیری می باشد و این ثابت انتگرال گیری همان شرط اولیه مسئله می باشد، بنابراین با اعمال شرط اولیه مسئله در معادله (6) خواهیم داشت:

$$y = y(0) + L^{-1}f - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny \quad (7)$$

اکنون جواب نهایی برای y به صورت زیر ارائه می شود:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n = y_0 + y_1 + y_2 + \dots \quad (8)$$

دو ترم اول در سمت راست معادله ی (7) به عنوان y_0 در معادله ی (8) معرفی می شود. در این روش برای ترم غیرخطی Ny در معادله ی (7) از تقریب به صورت زیر استفاده می شود:

$$Ny = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (y_0, y_1, \dots, y_n) = A_0 + A_1 + \dots \quad (9)$$

در معادله ی (9) ضرایب A_0, A_1, A_2, \dots به صورت زیر تعریف می شوند:

(آب) و توزیع یکنواخت سرعت در سرتاسر کانال، معادله یک بعدی جریان متغیر تدریجی در کانال های باز منشوری به صورت زیر است (Chow 1959, Subramanya 2009):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s_0 - s_f}{1 - Fr^2} \quad (1)$$

که در آن y عمق جریان، x فاصله در امتداد کانال، $\frac{dy}{dx}$ نحوه ی تغییرات عمق جریان نسبت به مکان x ، s_0 شیب طولی کانال، s_f شیب اصطکاک و Fr عدد فرود است. شیب اصطکاک را می توان توسط معادله ی مانینگ به صورت زیر به دست آورد:

$$s_f = \frac{Q^2 n^2}{A^2 R^3} \quad (2)$$

که در آن A مساحت جریان، Q دبی عبوری از کانال، n ضریب زبری مانینگ و R شعاع هیدرولیکی می باشد. عدد فرود می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$Fr^2 = \frac{Q^2 T}{gA^3} \quad (3)$$

که در آن T عرض سطح آزاد آب و g شتاب گرانش زمین می باشد.

توصیف کلی روش ADM

به طور کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی می تواند در فرم اولیه زیر نوشته شود:

$$F(y) = f \quad (4)$$

که در این معادله F ، یک عملگر دیفرانسیل غیرخطی می باشد که روی y اعمال می شود و خود y نیز تابعی از x می باشد. همچنین f می تواند در حالت کلی تابعی از x و y باشد. معادله (4) می تواند در فرم زیر با جزئیات بیشتر نوشته شود:

$$Ly + Ry + Ny = f \quad (5)$$

در معادله (5) L یک عملگر خطی می باشد که روی y اعمال

می شود به عنوان مثال می تواند $\frac{d}{dx}$ یا $\frac{d^2}{dx^2}$ و ... باشد. در واقع

و شکل جدید معادله (7) براساس معادله‌ی GVF به شکل زیر خواهد شد:

$$y = y(0) + L^{-1}Ny \quad (18)$$

اکنون در معادله‌ی (18) مقدار $y(0)$ همان مقدار عمق در شرط مرزی برای $x=0$ می‌باشد. بنابراین جواب‌ها برای y_1, y_2, \dots در معادله (15) و (16) با توجه به $R=0$ در مسئله GVF به دست می‌آید و در نهایت مقدار y در معادله (14) به صورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$y = y_0 + \int A_0 dx + \int A_1 dx + \dots \quad (19)$$

در معادله‌ی (19) ترم‌های دوم، سوم، چهارم و ... به ترتیب برابر y_1 و y_2 و y_3 و ... می‌باشند.

روش ADM برای پروفیل GVF در کانال مثلثی

مطابق روند ریاضی توضیح داده شده در بخش قبلی، در این قسمت روش ADM را برای معادله GVF در کانال مثلثی پیاده‌سازی می‌شود. با توجه به این که در بخش قبل پارامترهای روش ADM تعریف شده‌اند در نتیجه $f(y_0)$ مطابق با معادله (1) و جایگزینی پارامترهای Fr^2 و s_f از Chaudhry (2008) برای کانال مثلثی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(y_0) = \frac{s_0 - \frac{Q^2 n^2}{\left(\frac{my_0}{2\sqrt{1+m^2}}\right)^{\frac{4}{3}} (my_0^2)^2}}{1 - \left(\frac{Q^2 (2my_0)}{g (my_0^2)^3}\right)} \quad (20)$$

مطابق معادله‌های (10) تا (13) برای تعریف A_0, A_1, A_2, \dots اکنون y_1, y_2, y_3, \dots نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$y_1 = \int A_0 dx, \quad y_2 = \int A_1 dx, \quad y_3 = \int A_2 dx \quad (21)$$

لازم به ذکر است که در این جا مقادیر y_1, y_2, y_3, \dots نوشته شده‌اند و بقیه y ها مطابق تعاریف ضرایب A به دست می‌آیند. در این جا به لحاظ خلاصه نویسی تا y_3 برای کانال مثلثی نوشته شده است:

$$A_0 = Ny(y_0) \quad (10)$$

$$A_1 = y_1 \left(\frac{d}{dy_0} \right) Ny(y_0) \quad (11)$$

$$A_2 = y_2 \left(\frac{d}{dy_0} \right) Ny(y_0) + \left(\frac{y_1^2}{2!} \right) \left(\frac{d^2}{dy_0^2} \right) Ny(y_0) \quad (12)$$

$$A_3 = y_3 \left(\frac{d}{dy_0} \right) Ny(y_0) + y_1 y_2 \left(\frac{d^2}{dy_0^2} \right) Ny(y_0) + \left(\frac{y_1^3}{3!} \right) \left(\frac{d^3}{dy_0^3} \right) Ny(y_0) \quad (13)$$

اکنون معادله (7) را می‌توان با در نظر گرفتن معادله (9) و (8)، به صورت زیر نوشت:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n = y_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} y_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (14)$$

بنابراین y_1, y_2, \dots به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y_1 = -L^{-1}Ry_0 - L^{-1}A_0 \quad (15)$$

$$y_2 = -L^{-1}Ry_1 - L^{-1}A_1 \quad (16)$$

نتایج و بحث

پیاده‌سازی روش ADM بر معادله GVF

همان طور که قبلاً گفته شد، معادله GVF به صورت معادله (1) بیان می‌شود. اکنون با مقایسه کردن معادله (1) با فرمت نوشته شده در معادله (5)، پارامترهای معادله‌ی (5) برای معادله‌ی GVF به صورت زیر خواهد شد:

$$L = \frac{d}{dx}, \quad R = 0, \quad f = 0, \quad Ny = -\frac{s_0 - s_f}{1 - Fr^2} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 y_3 = & \left(s_0 - \frac{2Q^2 n^2 2^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{my_0}{\sqrt{I+m^2}} \right)^{\frac{4}{3}} m^2 y_0^4} \right) x^3 \times \\
 & \frac{8}{3} \times \frac{Q^2 n^2 2^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{my_0}{\sqrt{I+m^2}} \right)^{\frac{7}{3}} my_0^4 \sqrt{I+m^2}} \\
 & \left(\frac{1 - \frac{2Q^2}{m^2 y_0^5 g}}{8Q^2 n^2 2^{\frac{1}{3}}} \right. \\
 & \left. + \frac{\left(\frac{my_0}{\sqrt{I+m^2}} \right)^{\frac{4}{3}} m^2 y_0^5}{1 - \frac{2Q^2}{m^2 y_0^5 g}} \right) \\
 & 10 \left(s_0 - \frac{2Q^2 n^2 2^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{my_0}{\sqrt{I+m^2}} \right)^{\frac{4}{3}} m^2 y_0^4} \right) Q^2 \\
 & - \frac{\left(1 - \frac{2Q^2}{m^2 y_0^5 g} \right)^2}{m^2 y_0^6 g} \Big)^2 \Big) \\
 & \div 6 \left(1 - \frac{2Q^2}{m^2 y_0^5 g} \right) + \frac{1}{6} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{2Q^2}{m^2 y_0^5 g} \right)^2} \\
 & \times \left(s_0 - \frac{2Q^2 n^2 2^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{my_0}{\sqrt{I+m^2}} \right)^{\frac{4}{3}} m^2 y_0^4} \right)^2 x^3 \\
 & \times \left(\frac{-56}{9} \times \frac{Q^2 n^2 2^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{my_0}{\sqrt{I+m^2}} \right)^{\frac{7}{3}} y_0^4 (I+m^2)} \right. \\
 & \left. \times \frac{10}{1 - \frac{2Q^2}{m^2 y_0^5 g}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_1 = & \left(s_0 - \frac{2Q^2 n^2 2^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{my_0}{\sqrt{I+m^2}} \right)^{\frac{4}{3}} m^2 y_0^4} \right) x \\
 & \frac{1 - \frac{2Q^2}{m^2 y_0^5 g}}{8Q^2 n^2 2^{\frac{1}{3}}} \\
 & \frac{8}{3} \times \frac{Q^2 n^2 2^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{my_0}{\sqrt{I+m^2}} \right)^{\frac{7}{3}} my_0^4 \sqrt{I+m^2}} \\
 & \left(\frac{1 - \frac{2Q^2}{m^2 y_0^5 g}}{8Q^2 n^2 2^{\frac{1}{3}}} \right. \\
 & \left. + \frac{\left(\frac{my_0}{\sqrt{I+m^2}} \right)^{\frac{4}{3}} m^2 y_0^5}{1 - \frac{2Q^2}{m^2 y_0^5 g}} \right) \\
 & 10 \left(s_0 - \frac{2Q^2 n^2 2^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{my_0}{\sqrt{I+m^2}} \right)^{\frac{4}{3}} m^2 y_0^4} \right) Q^2 \\
 & - \frac{\left(1 - \frac{2Q^2}{m^2 y_0^5 g} \right)^2}{m^2 y_0^6 g} \Big)^2 \Big) \\
 & \div 2 \left(1 - \frac{2Q^2}{m^2 y_0^5 g} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_2 = & \left(s_0 - \frac{2Q^2 n^2 2^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{my_0}{\sqrt{I+m^2}} \right)^{\frac{4}{3}} m^2 y_0^4} \right) x^2 \times \\
 & \frac{8}{3} \times \frac{Q^2 n^2 2^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{my_0}{\sqrt{I+m^2}} \right)^{\frac{7}{3}} my_0^4 \sqrt{I+m^2}} \\
 & \left(\frac{1 - \frac{2Q^2}{m^2 y_0^5 g}}{8Q^2 n^2 2^{\frac{1}{3}}} \right. \\
 & \left. + \frac{\left(\frac{my_0}{\sqrt{I+m^2}} \right)^{\frac{4}{3}} m^2 y_0^5}{1 - \frac{2Q^2}{m^2 y_0^5 g}} \right) \\
 & 10 \left(s_0 - \frac{2Q^2 n^2 2^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{my_0}{\sqrt{I+m^2}} \right)^{\frac{4}{3}} m^2 y_0^4} \right) Q^2 \\
 & - \frac{\left(1 - \frac{2Q^2}{m^2 y_0^5 g} \right)^2}{m^2 y_0^6 g} \Big)^2 \Big) \\
 & \div 2 \left(1 - \frac{2Q^2}{m^2 y_0^5 g} \right)
 \end{aligned}$$

در این مرحله با توجه به توابع به دست آمده برای y ها، یک مثال در کانال مثلثی برای پروفیل GVF ارایه می شود. در این مثال یک کانال مثلثی در نظر گرفته می شود که دبی عبوری از آن (Q) ، چهار مترمکعب در ثانیه، ضریب زبری مانینگ (n) ، $0/015$ ، شیب کف کانال (s_0) ، $0/001$ ، شیب کناره کانال یک به $1/5$ می باشد. در مسیر این کانال یک بند قرار گرفته است که عمق آب قبل از بند را به $1/8$ متر می رساند. مقدار عمق آب قبل از بند ($1/8$ متر) در واقع همان مقدار شرط مرزی است و طبق تعریف انجام شده در بخش قبلی این مقدار همان y_0 می باشد. با جایگزینی این مقدار و بقیه ی پارامترهای هندسی تعریف شده در بالا برای کانال مثلثی در جملات y_1, y_2, y_3, \dots یا روابط (22) تا (24) و سپس جمع کردن آن مطابق رابطه (19) تقریب چهار جمله ای، پنج جمله ای و شش جمله ای روش ADM به صورت روابط (25) تا (27) به دست می آید. تقریب چهار جمله:

$$y = 1.8 + 0.0008403413359x + 2.207184209 \times 10^{-7} x^2 - 2.116598708 \times 10^{-10} x^3 \quad (25)$$

تقریب پنج جمله:

$$y = 1.8 + 0.0008403413359x + 2.207184209 \times 10^{-7} x^2 - 2.116598708 \times 10^{-10} x^3 + 1.327558335 \times 10^{-13} x^4 \quad (26)$$

تقریب شش جمله:

$$y = 1.8 + 0.0008403413359x + 2.207184209 \times 10^{-7} x^2 - 2.116598708 \times 10^{-10} x^3 + 1.327558335 \times 10^{-13} x^4 - 1.646506084 \times 10^{-17} x^5 \quad (27)$$

اکنون با گذاشتن مقادیر x در این روابط می توان مقدار y را برای هر نقطه x مشخص به دست آورد. با توجه به این که در نقطه ی $y=1/8$ ، مقدار x برابر صفر می باشد، در نتیجه به سمت بالادست جریان مقادیر x منفی می باشد و این مقادیر در روابط (25) تا (27) جایگزین می شوند. دقت نتایج روش نیمه تحلیلی ADM، با روش عددی تفاضل محدود رانگ کوتا مرتبه 4 (Chaudhry, 2008) مقایسه می شود. سپس پروفیل GVF را در قبل از بند به سمت بالادست با استفاده از روش ADM ترسیم

$$\frac{64}{3} \times \frac{Q^2 n^2 2^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{my_0}{\sqrt{1+m^2}}\right)^{\frac{7}{3}} my_0^5 \sqrt{1+m^2}} - \frac{2Q^2}{m^2 y_0^5 g} - \frac{40Q^2 n^2 2^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{my_0}{\sqrt{1+m^2}}\right)^{\frac{4}{3}} m^2 y_0^6} - \frac{2Q^2}{m^2 y_0^5 g} - 20\left(\frac{8}{3} \times \frac{Q^2 n^2 2^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{my_0}{\sqrt{1+m^2}}\right)^{\frac{7}{3}} my_0^4 \sqrt{1+m^2}} - \frac{\left(1 - \frac{2Q^2}{m^2 y_0^5 g}\right)^2 m^2 y_0^6 g}{8Q^2 n^2 2^{\frac{1}{3}}}\right) Q^2 + \frac{\left(\frac{my_0}{\sqrt{1+m^2}}\right)^{\frac{4}{3}} m^2 y_0^5}{\left(1 - \frac{2Q^2}{m^2 y_0^5 g}\right)^2 m^2 y_0^6 g} + 200\left(s_0 - \frac{2Q^2 n^2 2^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{my_0}{\sqrt{1+m^2}}\right)^{\frac{4}{3}} m^2 y_0^4}\right) Q^4 + \frac{\left(\frac{my_0}{\sqrt{1+m^2}}\right)^{\frac{4}{3}} m^2 y_0^4}{\left(1 - \frac{2Q^2}{m^2 y_0^5 g}\right)^2 m^4 y_0^{12} g^2} + 60\left(s_0 - \frac{2Q^2 n^2 2^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{my_0}{\sqrt{1+m^2}}\right)^{\frac{4}{3}} m^2 y_0^4}\right) Q^2 + \frac{\left(\frac{my_0}{\sqrt{1+m^2}}\right)^{\frac{4}{3}} m^2 y_0^4}{\left(1 - \frac{2Q^2}{m^2 y_0^5 g}\right)^2 m^2 y_0^7 g} \quad))$$

(24)، می‌توان پروفیل سطح آب را برای تقریب شش جمله در حالت شیب تند برای کانال داده‌شده را به‌صورت رابطه (29) ارایه داد:

$$y = 0.9 - 0.0006760440517x + 0.7670348098 \times 10^{-5} x^2 - 7.843686592 \times 10^{-8} x^3 + 8.510525603 \times 10^{-10} x^4 - 1.005608040 \times 10^{-11} x^5 \quad (29)$$

نمودار مربوط به این معادله همراه با مقایسه با روش تفاضل محدود در شکل (2) برای طول 30 متر از پایین‌دست به بالادست کانال نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل نیز مشاهده می‌گردد پروفیل روش ADM تطابق خوبی را با پروفیل روش عددی FDM نشان می‌دهد. بنابراین دقت بالای روش ADM در کانال با شیب تند نیز کاملاً مشهود می‌باشد. همچنین نتایج کمیته این نمودار به‌صورت جدول (2) برای فواصل پنج متری در طول کانال ارایه شده است. همان‌طور که در جدول (2) نمایش داده شده است، حداکثر خطا یا RE در این حالت نیز 0/11 درصد می‌باشد و بنابراین دقت بالای روش ADM در کانال با شیب تند نیز کاملاً مشهود می‌باشد.

روش ADM برای پروفیل GVF در کانال دوزنقه‌ای

با توجه به روند روش ADM توضیح داده‌شده در بخش‌های قبلی، این روش را برای کانال دوزنقه‌ای می‌توان پیاده‌سازی نمود. در ابتدا تابع $f(y_0)$ با توجه به معادله (1) و تعریف انجام‌شده برای روش ADM و همچنین جایگزینی پارامترهای Fr و S_f از معادله‌ی مانینگ برای کانال دوزنقه‌ای به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(y_0) = \frac{1}{1 - \left(\frac{Q^2 (b + 2my_0)}{g((b + my_0)y_0)^3} \right)} \times \left(s_0 - \frac{Q^2 n^2}{\left(\frac{(b + my_0)y_0}{b + 2\sqrt{y_0^2 + m^2 y_0^2}} \right)^{\frac{4}{3}} ((b + my_0)y_0)^2} \right) \quad (30)$$

و همچنین y_1, y_2, \dots نیز به‌صورت زیر برای کانال‌های دوزنقه‌ای به‌دست می‌آیند:

می‌شود. شکل (1) نتایج روش ADM را برای پروفیل GVF در کانال مثلثی برای تقریب‌های مختلف و مقایسه با روش تفاضل محدود یا FDM (Numerical solution) در طول 600 متر به سمت بالادست جریان را نشان می‌دهد. در شکل (1)، مقدار Δx برای روش عددی FDM برابر یک متر انتخاب شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود شکل (A-1) تقریب چهارجمله‌ای را نشان می‌دهد که در همین تقریب، نتایج عددی با نتایج روش ADM تا حدود زیادی روی یکدیگر منطبق شده‌اند و بسیار منطقی و قابل قبول می‌باشند. همچنین با افزایش تقریب به پنج جمله (شکل B-1) هم انطباق خوبی حاصل شد. در تقریب شش جمله (شکل C-1) انطباق کامل روش عددی با روش ADM ایجاد شده است و این نشان از دقت بالای روش ADM و هم-چنین هم‌گرایی سریع جمع مقادیر y در رابطه (27) دارد. همچنین نتایج مقداری این مقایسه‌ها برای فواصل 100 متر در جدول (1) ارایه شده است. در این جدول، نتایج عمق آب برحسب متر برای تقریب‌های چهار، پنج و شش جمله‌ای روش آدومین (ADM) و در ستون پنجم نتایج روش عددی تفاضل محدود ارایه شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، با افزایش جملات روش آدومین جواب‌های این روش با روش عددی تطابق بهتری را پیدا می‌کند. در ستون ششم این جدول درصد خطا یا Relative Error (RE) میان تقریب شش جمله ADM با نتایج روش عددی تفاضل محدود محاسبه شده است. مقدار RE به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$RE = \frac{|y_{ADM} - y_{FDM}|}{y_{ADM}} \times 100 \quad (28)$$

همان‌طور که در جدول (1) مشاهده می‌گردد، مقدار RE در چند مورد برابر صفر درصد می‌باشد و حداکثر خطا به مقدار 0/51 درصد محدود می‌شود و این نشان از دقت بالای روش ADM در محاسبه دقیق پروفیل سطح آب دارد.

مثال دومی که در این بخش ارایه می‌گردد، مربوط به پروفیل جریان متغیر تدریجی برای کانال مثلثی در روی شیب تند می‌باشد. اطلاعات و خصوصیات هندسی کانال در این مثال، از کتاب (2010) Szymkiewicz گرفته شده است. به‌طوری‌که در این کانال مثلثی، دبی عبوری از آن (Q)، چهار مترمکعب در ثانیه، ضریب زبری مانینگ (n)، 0/01، شیب کف کانال (s_0)، 0/005، شیب کناره کانال یک به 1/5 می‌باشد. عمق آب در پایین‌دست این کانال 0/9 متر می‌باشد که این همان مقدار y_0 در روش آدومین می‌باشد. با توجه به مشخصات این کانال، بر روی شیب تند پروفیل S_2 شکل می‌گیرد. با جایگزینی پارامترهای این مثال همانند قبل در جملات y_1, y_2, y_3, \dots یا روابط (22) تا

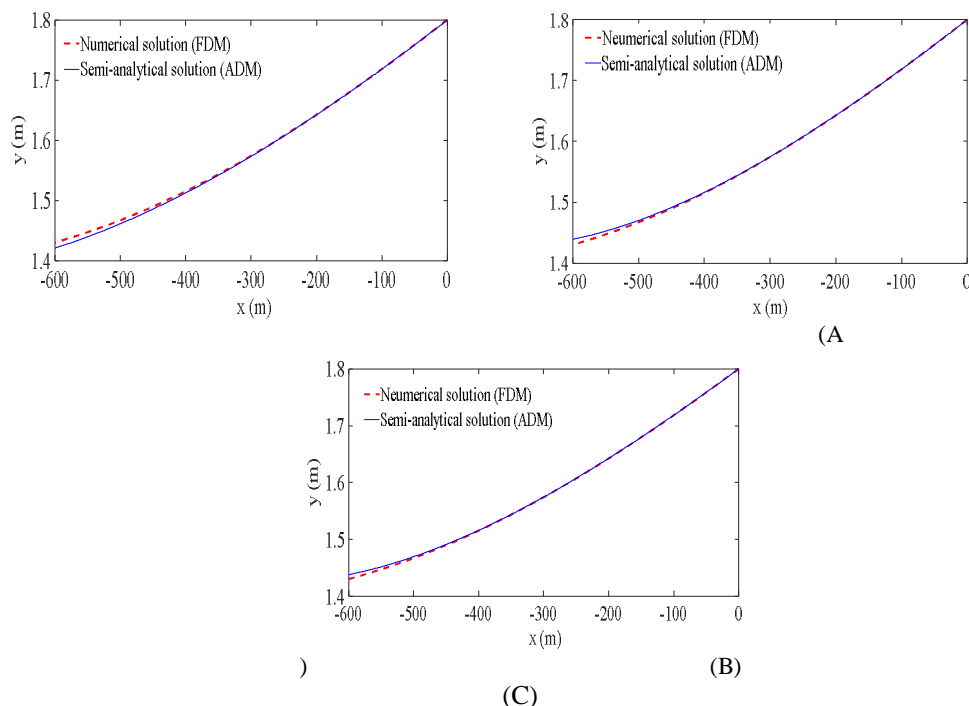


Fig. 1- A comparison of numerical and semi-analytical methods in the triangular channel A) four terms approximation, B) five terms approximation, C) six terms approximation

شکل 1- مقایسه روش عددی و شبه تحلیلی در کانال مثلثی (A): تقریب 4 جمله، (B): تقریب 5 جمله، (C): تقریب 6 جمله

جدول 1- محاسبه عمق جریان (برحسب متر) در فواصل مختلف از کانال مثلثی با شیب ملایم برای تقریب‌های مختلف روش

ADM و مقایسه با نتایج حل FDM

Table 1- A comparison between the values of flow depth computed by ADM and FDM methods in different locations of triangular channel with mild slope

| X (m) | y_{ADM} (m) (four terms approximation) | y_{ADM} (m) (five terms approximation) | y_{ADM} (m) (six terms approximation) | y_{FDM} (m) $\Delta x=1$ m | RE (%) |
|-------|--|--|---|---------------------------------|-----------|
| -100 | 1.7184 | 1.7183 | 1.7183 | 1.7183 | 0 |
| -200 | 1.6425 | 1.6426 | 1.6426 | 1.6426 | 0 |
| -300 | 1.5735 | 1.5741 | 1.5743 | 1.5743 | 0 |
| -400 | 1.5127 | 1.5161 | 1.5159 | 1.5154 | 0.03 |
| -500 | 1.4615 | 1.4698 | 1.4691 | 1.4677 | 0.09 |
| -600 | 1.4210 | 1.4382 | 1.4378 | 1.4304 | 0.51 |

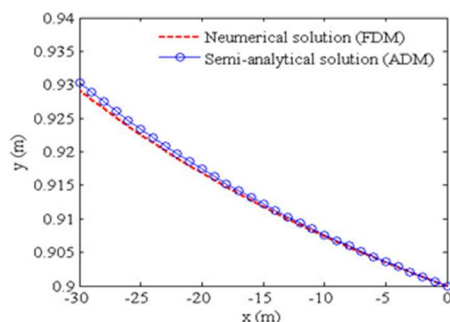


Fig. 2- A comparison of S_2 profile in the triangular channel with steep slope by the six terms ADM approximation and FDM methods

شکل 2- مقایسه پروفیل S_2 در دو روش ADM با تقریب شش جمله و FDM بر روی کانال مثلثی با شیب تند

جدول 2- محاسبه عمق جریان (بر حسب متر) در فواصل مختلف از کانال مثلثی با شیب تند برای تقریب شش جمله روش

ADM و مقایسه با نتایج حل FDM

Table 2- A comparison between the values of flow depth computed by ADM and FDM methods in different locations of triangular channel with steep slope

| X (m) | y _{ADM} (m) | y _{FDM} (m) | %RE |
|-------|----------------------|----------------------|------|
| -5 | 0.9036 | 0.9035 | 0.01 |
| -10 | 0.9076 | 0.9074 | 0.02 |
| -15 | 0.9122 | 0.9118 | 0.04 |
| -20 | 0.9174 | 0.9169 | 0.05 |
| -25 | 0.9234 | 0.9226 | 0.08 |
| -30 | 0.9303 | 0.9292 | 0.11 |

$$\begin{aligned} & - \frac{(b + my_0)y_0(2y_0 + 2m^2y_0)}{(b + 2\sqrt{y_0^2 + m^2y_0^2})^2\sqrt{y_0^2 + m^2y_0^2}} \\ & \div (3\left(\frac{(b + my_0)y_0}{b + 2\sqrt{y_0^2 + m^2y_0^2}}\right)^{\frac{7}{3}} \\ & \times (b + my_0)^2y_0^2) \\ & + \frac{2Q^2n^2m}{\left(\frac{(b + my_0)y_0}{b + 2\sqrt{y_0^2 + m^2y_0^2}}\right)^{\frac{4}{3}}(b + my_0)^3y_0^2} \\ & + \frac{2Q^2n^2}{\left(\frac{(b + my_0)y_0}{b + 2\sqrt{y_0^2 + m^2y_0^2}}\right)^{\frac{4}{3}}(b + my_0)^2y_0^3} \\ & - \left(s_0 - \frac{Q^2n^2}{\left(\frac{(b + my_0)y_0}{b + 2\sqrt{y_0^2 + m^2y_0^2}}\right)^{\frac{4}{3}}}\right. \\ & \left. \times \frac{1}{(b + my_0)^2y_0^2}\right) \\ & \times \left(-\frac{2Q^2m}{g(b + my_0)^3y_0^3}\right. \\ & \left. + \frac{3Q^2(b + 2my_0)m}{g(b + my_0)^4y_0^3}\right. \\ & \left. + \frac{3Q^2(b + 2my_0)}{g(b + my_0)^3y_0^4}\right) \\ & \div \left(1 - \frac{Q^2(b + 2my_0)}{g(b + my_0)^3y_0^3}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x}{1 - \frac{Q^2(b + 2my_0)}{g(b + my_0)^3y_0^3}} \times \\ & \left(s_0 - \frac{Q^2n^2}{\left(\frac{(b + my_0)y_0}{b + 2\sqrt{y_0^2 + m^2y_0^2}}\right)^{\frac{4}{3}}}\right. \\ & \left. \times \frac{1}{(b + my_0)^2y_0^2}\right) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{1 - \frac{Q^2(b + 2my_0)}{g(b + my_0)^3y_0^3}} \\ & \times \left(s_0 - \frac{Q^2n^2}{\left(\frac{(b + my_0)y_0}{b + 2\sqrt{y_0^2 + m^2y_0^2}}\right)^{\frac{4}{3}}}\right. \\ & \left. \times \frac{1}{(b + my_0)^2y_0^2}\right) \\ & \times \left(\frac{1}{1 - \frac{Q^2(b + 2my_0)}{g(b + my_0)^3y_0^3}}\right) \times \\ & \left((4Q^2n^2\left(\frac{my_0}{b + 2\sqrt{y_0^2 + m^2y_0^2}}\right)\right. \\ & \left. + \frac{b + my_0}{b + 2\sqrt{y_0^2 + m^2y_0^2}}\right) \end{aligned} \quad (32)$$

با قرار دادن مقادیر x از صفر به سمت بالادست جریان (x) علامت منفی)، در روابط (35) تا (37) می‌توان پروفیل سطح آب را برای کانال دوزنقه‌ای در تقریب‌های مختلف ترسیم کرد. همچنین در اینجا نیز دقت نتایج روش نیمه‌تحلیلی ADM با روش تفاضل محدود رانگ‌کو تا مرتبه چهار مقایسه می‌شود. مقدار گام مکانی یا Δx در روش FDM برابر با $\Delta x = I(m)$ نظر گرفته شده است. در شکل (3) نتایج روش ADM برای پروفیل GVF کانال دوزنقه‌ای با تقریب‌های مختلف و همچنین مقایسه با روش FDM در یک طول 600 متر به سمت بالادست جریان نمایش داده شده است. در شکل (A-3) که تقریب چهارجمله‌ای روش ADM (رابطه 35) نمایش داده شده است تا حدود زیادی با نتایج روش عددی FDM تطابق دارد. این نشان می‌دهد که روش ADM حتی در تقریب چهارجمله‌ای به صورت بسیار دقیق می‌تواند برای ترسیم پروفیل GVF و به دست آوردن عمق آب در نقاط مختلف کانال، مورد استفاده قرار گیرد. با افزایش تقریب به پنج جمله (رابطه 36)، تقریب ADM بهتر شده است (شکل B-3) و در نهایت با تقریب شش جمله (رابطه 37)، تقریب ADM دقیقاً مثل روش عددی FDM مطابق شکل (C-3) پروفیل سطح آب را به سمت بالادست به دست آورده است. بنابراین می‌توان روش ADM را با موفقیت برای ترسیم پروفیل سطح آب در کانال دوزنقه‌ای نیز مورد استفاده قرار داد. همچنین نتایج مقداری این مقایسه‌ها برای فواصل 100 متر در جدول (3) ارائه شده است. همان‌طور که در این جدول مشاهده می‌شود، نتایج عمق آب برحسب متر برای تقریب‌های چهار، پنج و شش جمله‌ای روش آدومین (ADM) و نتایج روش عددی تفاضل محدود ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش جملات روش آدومین جواب‌های این روش با روش عددی تطابق بهتری پیدا می‌کند. در ستون ششم این جدول درصد خطا یا Relative Error (RE) میان تقریب شش جمله ADM با نتایج روش عددی تفاضل محدود محاسبه شده است. همان‌طور که در این جدول مشاهده می‌گردد با افزایش جملات روش آدومین مقدار y_{ADM} به مقدار y_{FDM} نزدیک‌تر می‌گردد. مقدار RE در چند مورد برابر صفر می‌باشد و حداکثر خطا در این حالت به مقدار 0/02 درصد محدود می‌شود و لذا می‌توان از روش ADM با موفقیت برای تعیین پروفیل سطح آب در کانال دوزنقه‌ای استفاده کرد. در ادامه یک مثال از جریان متغیر تدریجی برای کانال دوزنقه‌ای که روی شیب تند ایجاد می‌گردد ارائه شده است.

در این‌جا به لحاظ خلاصه‌نویسی و با توجه به بزرگ بودن بقیه جملات، فقط جملات y_1 و y_2 نوشته شده‌اند. بقیه جملات با توجه به تعاریف در بخش قبل به دست می‌آیند. در این مرحله نیز یک مثال برای کانال دوزنقه‌ای به شرح زیر ارائه شده است. در این مثال یک کانال دوزنقه‌ای با دبی (Q)، چهار مترمکعب در ثانیه، ضریب زبری مایننگ (n)، 0/015، شیب کف کانال (S_0)، 0/001، شیب کناره کانال یک به $1/5$ ($m=1/5$) بررسی می‌شود. در مسیر این کانال یک بندی قرار گرفته است که عمق آب قبل از بند را به $1/2$ متر می‌رساند. اکنون هدف به دست آوردن پروفیل جریان GVF از محل بند به سمت بالادست با استفاده از روش ADM می‌باشد. اکنون با قرار دادن $y_0=1/8$ و همچنین دیگر پارامترهای هندسی بالا در روابط (31) و (32) و سپس جمع کردن آن‌ها تقریب‌های چهارجمله‌ای، پنج‌جمله‌ای و شش‌جمله‌ای روش ADM در حالت کانال دوزنقه‌ای به صورت روابط (33)، (34) و (35) ارائه می‌گردد.

تقریب چهار جمله:

$$y = 1.2 + 0.9242351909 \times 10^{-3} x + 1.175404116 \times 10^{-7} x^2 - 1.427257080 \times 10^{-10} x^3 \quad (33)$$

تقریب پنج جمله:

$$y = 1.2 + 0.9242351909 \times 10^{-3} x + 1.175404116 \times 10^{-7} x^2 - 1.427257080 \times 10^{-10} x^3 + 1.442378003 \times 10^{-13} x^4 \quad (34)$$

تقریب شش جمله:

$$y = 1.2 + 0.9242351909 \times 10^{-3} x + 1.175404116 \times 10^{-7} x^2 - 1.427257080 \times 10^{-10} x^3 + 1.442378003 \times 10^{-13} x^4 - 1.198772926 \times 10^{-16} x^5 \quad (35)$$

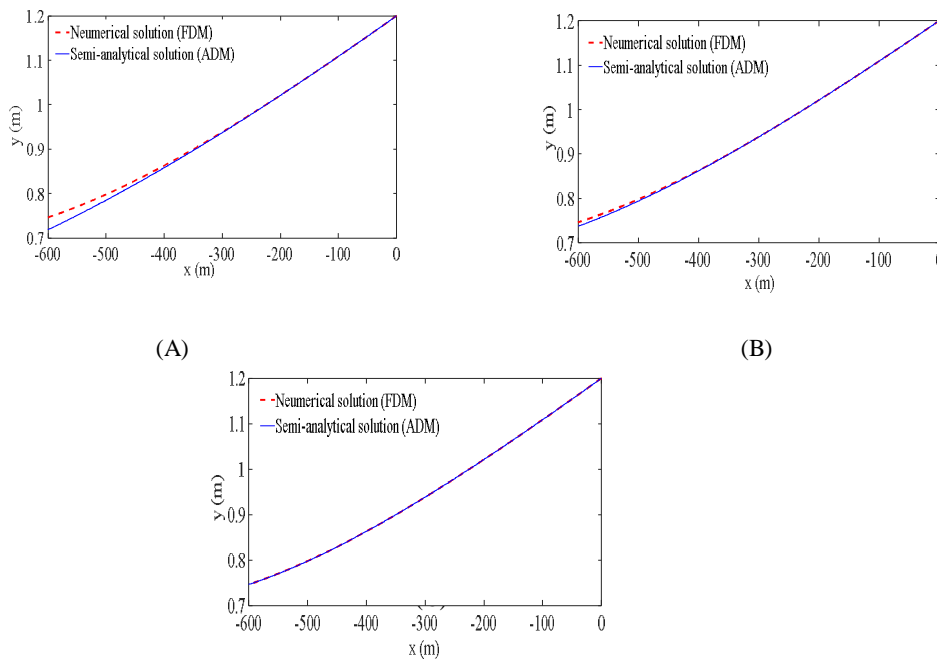


Fig. 3- A comparison of numerical and semi-analytical methods in the trapezoidal channel A) four terms approximation, B) five terms approximation, C) six terms approximation

شکل 3- مقایسه روش عددی و شبه تحلیلی در کانال ذوزنقه‌ای، (A): تقریب 4 جمله، (B): تقریب 5 جمله، (C): تقریب 6 جمله

جدول 3- محاسبه عمق جریان (بر حسب متر) در فواصل مختلف از کانال ذوزنقه‌ای با شیب ملایم برای تقریب‌های مختلف روش ADM و مقایسه با نتایج حل FDM

Table 3- A comparison between the values of flow depth computed by ADM and FDM methods in different locations of trapezoidal channel with mild slope

| X (m) | yADM (m) (four terms approximation) | yADM (m) (five terms approximation) | yADM (m) (six terms approximation) | yFDM (m) $\Delta x=1$ m | RE (%) |
|-------|---|---|--|-------------------------------|--------|
| -100 | 1.1089 | 1.1089 | 1.1089 | 1.1089 | 0 |
| -200 | 1.0210 | 1.0212 | 1.0213 | 1.0213 | 0 |
| -300 | 0.9372 | 0.9383 | 0.9386 | 0.9385 | 0.01 |
| -400 | 0.8582 | 0.8619 | 0.8632 | 0.8632 | 0 |
| -500 | 0.7851 | 0.7941 | 0.7979 | 0.7981 | 0.02 |
| -600 | 0.7186 | 0.7373 | 0.7466 | 0.7465 | 0.01 |

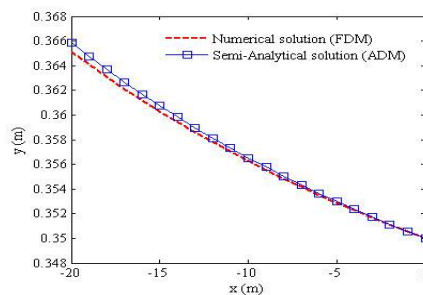


Fig. 4- A comparison of S_2 profile in the trapezoidal channel with steep slope by the six terms ADM approximation and FDM methods

شکل 4- مقایسه پروفیل S_2 در دو روش ADM با تقریب شش جمله و FDM بر روی کانال ذوزنقه‌ای با شیب تند

جدول 4- محاسبه عمق جریان (بر حسب متر) در فواصل مختلف از کانال دوزنقه‌ای با شیب تند برای تقریب شش جمله روش ADM و مقایسه با نتایج حل FDM

Table 4- A comparison between the values of flow depth computed by ADM and FDM methods in different locations of trapezoidal channel with steep slope

| X (m) | y _{ADM} (m) | y _{FDM} (m) | %RE |
|-------|----------------------|----------------------|------|
| -4 | 0.3522 | 0.3523 | 0.02 |
| -8 | 0.3548 | 0.3550 | 0.05 |
| -12 | 0.3578 | 0.3581 | 0.08 |
| -16 | 0.3611 | 0.3619 | 0.22 |
| -20 | 0.3658 | 0.3651 | 0.19 |

می‌گردد پروفیل روش ADM تطابق خوبی با پروفیل روش عددی FDM نشان می‌دهد. همچنین نتایج کمیته این نمودار به صورت جدول (4) برای فواصل چهار متری در طول کانال ارایه شده است. حداکثر خطا یا RE در این حالت نیز 0/22 درصد می‌باشد (جدول 4) و بنابراین دقت بالای روش ADM در کانال دوزنقه‌ای با شیب تند نیز کاملاً قابل قبول می‌باشد

نتیجه گیری

در این مقاله روش شبه تحلیلی ADM به منظور به دست آوردن و ترسیم پروفیل سطح آب در کانال مثلثی و دوزنقه‌ای مورد استفاده قرار گرفت. بدین معنی که برای پروفیل سطح آب یک معادله بر حسب فاصله - عمق ارایه گردید که با قرار دادن فاصله در این معادله بتوان عمق را در فاصله مورد نظر به دست آورد. نتایج معادلات ارایه شده از روش ADM با نتایج روش عددی FDM مقایسه گردید و مشاهده گردید که در همان تقریب چهار جمله نیز نتایج پروفیل سطح آب در کانال مثلثی و دوزنقه‌ای با استفاده از روش شبه تحلیلی ADM مطابقت بسیار خوبی با نتایج روش عددی FDM دارد. با افزایش تقریب جملات روش نیمه تحلیلی ADM مشاهده گردید که نتایج تطابق بسیار بهتری نسبت به تقریب جملات کمتر خواهند داشت، به طوری که در تقریب شش جمله‌ای روش ADM و روش عددی FDM در کانال مثلثی و دوزنقه‌ای کاملاً بر روی یکدیگر منطبق می‌شوند. با توجه به این که روش ADM حل معادله دیفرانسیل را به صورت یک تابع پیوسته و روش عددی مقادیر عمق آب را به صورت ناپیوسته در طول کانال ارایه می‌دهند، لذا توابع ارایه شده برای تقریب جملات در کانال مثلثی و دوزنقه‌ای می‌توانند به منظور صحت سنجی سایر روش‌های عددی مورد استفاده قرار گیرند.

تقدیر و تشکر

محققین بر خود لازم می‌دانند تا از امکاناتی که دانشگاه شهرکرد در جهت انجام تحقیق در اختیارشان قرار داده است، تقدیر و تشکر نمایند.

این مثال از کتاب (2010) Szymkiewicz برگرفته شده است. در این مثال، دبی آب در کانال دبی عبوری از آن (Q)، چهار مترمکعب در ثانیه، ضریب زبری مانینگ (n)، 0/01، شیب کف کانال (s_0)، 0/005، شیب کناره کانال یک به 1/5 می‌باشد و عرض کف کانال 3/5 متر می‌باشد. مقدار عمق آب در پایین دست 0/35 متر می‌باشد که این مقدار همان شرط مرزی معادله حاکم و یا y_0 در روش آدومین می‌باشد. با توجه به مشخصات این کانال، بر روی شیب تند پروفیل S_2 شکل می‌گیرد. با جایگزینی پارامترهای این مثال همانند قبل در جملات y_1, y_2, y_3, \dots یا روابط (32) تا (34)، می‌توان پروفیل سطح آب را برای تقریب شش جمله در حالت شیب تند برای کانال دوزنقه‌ای داده شده را به صورت زیر ارایه داد:

$$y = 0.35 - 0.5500838585 \times 10^{-3} x^3 + 0.8826128045 \times 10^{-5} x^2 - 1.213638815 \times 10^{-7} x^3 + 1.711390448 \times 10^{-9} x^4 - 2.602332954 \times 10^{-11} x^5 \quad (36)$$

نمودار مربوط به این معادله همراه با مقایسه با روش تفاضل محدود در شکل (4) برای طول 20 متر از پایین دست به بالادست کانال نشان داده شده است. همان طور که در این شکل نیز مشاهده می‌گردد پروفیل روش ADM تطابق خوبی با پروفیل روش عددی FDM نشان می‌دهد. همچنین نتایج کمیته این نمودار به صورت جدول (4) برای فواصل چهار متری در طول کانال ارایه شده است. حداکثر خطا یا RE در این حالت نیز 0/22 درصد می‌باشد (جدول 4) و بنابراین دقت بالای روش ADM در کانال دوزنقه‌ای با شیب تند نیز کاملاً قابل قبول می‌باشد. نمودار مربوط به این معادله همراه با مقایسه با روش تفاضل محدود در شکل (4) برای طول 20 متر از پایین دست به بالادست کانال نشان داده شده است. همان طور که در این شکل نیز مشاهده

References

- 1-Achour, B. and Debabeche, M., 2003. Control of hydraulic jump by sill in a triangular channel. *Journal of Hydraulic Research*, 41(3), pp. 97–103.
- 2-Adomian, G., 1986. *Nonlinear stochastic operator equations*. Academic Press.
- 3-Chaudhry, M.H., 2008. *Open channel flows*. Second Edition, Springer Science, Spring Street, New York.
- 4-Chow, V.T., 1959. *Open-channel hydraulics*. New York: McGraw-Hill.
- 5-Das, A., 2007. Flooding probability constrained optimal design of trapezoidal channels. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 133(1), pp. 53–60.
- 6-Desatnik, M.S. and Qassim, R.Y., 2017. A new exact solution of one dimensional steady gradually varied flow in open channels. *Journal of Engineering Mathematics*. 1(1), pp. 7-10.
- 7-Hager, W.H., 2010. *Wastewater hydraulics: theory and practice*. New York, N.Y. Springer.
- 8-Homayoon, L. and Abedini, M.J., 2019. Development of an analytical benchmark solution to assess various gradually varied flow computations. *Journal of Hydraulic Engineering*. <https://doi.org/10.1080/09715010.2018.1563872>
- 9-Jan, C.D. and Chen, CL., 2013. Gradually varied open-channel flow profiles normalized by critical depth and analytically solved by using Gaussian hypergeometric functions. *Hydrology and Earth System Sciences*, 17(3), pp. 973–987.
- 10-Jan, C.D., 2014. *Gradually-varied flow profiles in open channels: Analytical solutions by using Gaussian hypergeometric function*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- 11-Subramanya, K., 2009. *Flow in open channels*. 3rd ed. New York: Tata McGraw- Hill.
- 12-Szymkiewicz, R., 2010. *Numerical modeling in open channel hydraulics*. New York, Springer.
- 13-Vatankhah, A.R., 2010a. Analytical integration of the equation of gradually varied flow for triangular channels. *Flow Measurement and Instrumentation*, 21(4), pp. 546–549.
- 14-Vatankhah, A.R., 2010b. Exact sensitivity equation for one-dimensional steady-state shallow water flow (application to model calibration). *Journal of Hydraulic Engineering*, 15(11), pp. 939–945.
- 15-Vatankhah, A.R., 2011a. Direct integration of gradually varied flow equation in parabolic channels. *Flow Measurement and Instrumentation*, 22(3), pp. 235–241.
- 16-Vatankhah, A.R., 2011b. Direct integration of Manning based GVF equation in trapezoidal channels. *Journal of Hydrologic Engineering*, 17(3), pp. 455-462.
- 17-Vatankhah, A.R., 2015. Analytical solution of gradually varied flow equation in circular channels using variable Manning coefficient. *Flow Measurement and Instrumentation*, 43, pp. 53-58.
- 18-Zaghloul, N.A., and Anwar, M.N., 1991. Numerical integration of gradually varied flow in trapezoidal channel. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 88, pp. 259-272.