نتایجی درباره گروه‌های کامل

حمید محمدزاده و بهروز عدالت‌زاده[1]

گروه ریاضی، دانشگاه علم و فناوری مازندران

گروه ریاضی، دانشگاه رازی

تاریخ دریافت: تاریخ پذیرش:

چکیده: فرض کنید G یک گروه کامل باشد. در این مقاله با روش جدیدی ثابت می‌کنیم که هر خودریختی از گروه G را می‌توان به‌طور یکتا به یک خودریختی از گروه پوششی G ارتقا داد. همچنین ثابت می‌کنیم اگر G یک فاکتور مرکزی از گروهی مثل H باشد آنگاه هر خودریختی از گروه G به‌طور یکتا به یک همریختی از گروه پوششی G به H ارتقا پیدا می‌کند.

واژه‌های کلیدی: گروه کامل، گروه پوششی، خودریختی.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۱۱H۵۶، ۳۲M۱۷.

۱-مقدمه

دنباله دقیق کوتاه $(E)\ 1\to A\to H\to G\to 1$ از گروه‌ها یک توسیع مرکزی[2] گروه G نامیده می‌شود هرگاه A یک زیرگروه مرکزی H باشد، به‌علاوه توسیع مرکزی E یک توسیع استم[3] است هرگاه $A\subseteq[H,H]$. پوشش استم[4] گروه متناهی G توسیع استمی است که H در بین همه توسیع‌های استم بیشترین مرتبه ممکن را داشته باشد، البته می‌توان دید که این تعریف بااینکه $A\simeq H_2(G,\mathbb{Z})$ نیز هم‌ارز است. هرگاه $1\to A\to H\to G\to 1\ (E)$ یک پوشش استم گروه G باشد، H یک گروه پوششی[5] G نامیده می‌شود. شور در اوایل قرن بیستم ثابت

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله:edalatzadeh@gmail.com

2-Central extension
3- Stem extension
4- Stem cover
5- Covering group

کرد که هر گروه متناهی دارای حداقل یک پوشش استم است و به‌علاوه همه گروه‌های پوششی G باهم ایزوکلینیک هستند. مطالعه و دسته‌بندی کلاس توسیع‌های مرکزی یک گروه از مهم‌ترین اهداف مطالعه نظریه همولوژی و کوهمولوژی گروه‌هاست. در بین همه گروه‌های همولوژی گروه G، دومین همولوژی صحیح[1]، یعنی $H_2(G,\mathbb{Z})$، که به ضربگر شور[2] گروه G نیز معروف است، بیشترین کاربرد را در شناسایی و دسته‌بندی خواص G دارد.

گروه G یک گروه کامل[3] نامیده می‌شود هرگاه G با زیرگروه جابجاگر خود برابر باشد، به عبارتی $G=[G,G]$. به‌سادگی می‌توان دید که هر گروه ساده غیر آبلی یک گروه کامل است، البته گروه‌های کاملی هم وجود دارند که ساده نیستند، که از آن جمله می‌توان به $SL(2,q)$ برای $q>3$ اشاره کرد. به‌سادگی می‌توان دید که هر توسیع استم یک گروه کامل، گروهی کامل است و بنابراین گروه پوششی هر گروه کاملی که ضربگر شور غیر بدیهی دارد یک گروه کامل غیر ساده است. برای مشاهده لیست جامعی از گروه‌های کامل مرجع [1] را ببینید. در کنار همه جذابیت‌های گروه‌های کامل، وجود توسیع مرکزی جهانی[4] ازجمله مهم‌ترین ویژگی‌های مشخص و تعیین‌کننده گروه‌های کامل است.

فرض کنید G یک گروه و $(E_i)\,1\to A_i\to G_i\xrightarrow{\pi_i}G\to 1,(i=1,2)$ دو توسیع مرکزی از گروه G باشند، گوییم توسیع مرکزی E_1 توسیع مرکزی E_2 را می‌پوشاند، هرگاه همریختی $\theta:G_1\to G_2$ موجود باشد به‌طوری‌که نمودار زیر جابجایی باشد:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(E_1) & 1 & \to & A_1 & \to & G_1 & \xrightarrow{\pi_1} & G & \to 1\\
 & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle Id} & \\
(E_2) & 1 & \to & A_2 & \to & G_2 & \xrightarrow{\pi_2} & G & \to 1
\end{array}
$$

همچنین گوییم توسیع مرکزی E_1 توسیع مرکزی E_2 را به‌طور یکتا می‌پوشاند هرگاه θ القاشده با خاصیت فوق یکتا باشد. توسیع E توسیع مرکزی جهانی گروه G نامیده می‌شود هرگاه E هر توسیع مرکزی دلخواه G را به‌صورت یکتا بپوشاند.

با تعاریف نظریه رسته‌ها، یک توسیع مرکزی جهانی از گروه G یک شیء آغازین در رسته توسیع-های مرکزی از گروه G است. مطالعه این خانواده از توسیع‌های مرکزی در رسته‌های دیگر جبری

1- Integral homology
2-Schur multiplier
3- Perfect group
4- Universal central extension

نظیر جبرهای لی، جبرهای لایبنیتس و ... نیز انجام گرفته است. همچنین در مرجع[۲] توسیع-های مرکزی جهانی و خواص آن‌ها در رسته مدول‌های متقاطع و شبه متقاطع که به‌نوعی ابررسته گروه‌ها محسوب می‌شوند موردمطالعه قرارگرفته است. درکلی‌ترین حالت مفهوم توسیع مرکزی جهانی در رسته‌های شبه آبلی در مرجع [۳] بررسی‌شده‌اند. اخیراً در مرجع[۴] نظریه توسیع‌های جهانی برای p'-گروه‌های کامل نیز مطرح گردیده و نتایج بیان‌شده در این موضوع برای p'-توسیع‌های مرکزی نیز تعمیم داده‌شده است.

در ادامه برای تعیین ساختار توسیع مرکزی جهانی یک گروه کامل مفهوم حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی گروه‌ها را یادآوری می‌کنیم.

فرض کنید G یک گروه و M, N زیرگروه‌های نرمالی از G باشند. حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی[۱] $M \otimes N$ از M, N گروه تولیدشده توسط نمادهای $m \otimes n$ برای $m \in M, n \in N$ است به‌طوری‌که شرایط زیر برای هر $m, m' \in M$ و $n, n' \in N$ برقرار باشند:

$$mm' \otimes n = ((m^{-1}m'm \otimes m^{-1}nm)(m \otimes n)),$$

$$mm' \otimes n = ((m \otimes n)(n^{-1}mn \otimes n^{-1}n'n)).$$

می‌توان بررسی کرد که نگاشت جابجاگر $[-,-]: M \otimes N \to [M, N]$ که روی مولدهای $M \otimes N$ با ضابطه $[-,-](m \otimes n) = m^{-1}n^{-1}mn$ تعریف می‌شود یک بروریختی از گروه-هاست. برای مشاهده مهم‌ترین خواص حاصل‌ضرب تانسوری گروه‌ها و نگاشت جابجاگر مرجع [۵] را ببینید.

گزاره زیر خواص اساسی توسیع مرکزی جهانی را بیان می‌کند.

گزاره ۱-۱. *موارد زیر برقرار است:*

الف) توسیع مرکزی جهانی یک گروه در صورت وجود با تقریب یکریختی یکتاست.

ب) اگر $(E)\ 1 \to A \to H \xrightarrow{\pi} G \to 1$ یک توسیع مرکزی جهانی باشد آنگاه گروه‌های G و H هر دو گروه کامل هستند و به‌علاوه $A \simeq H_2(G, \mathbb{Z})$ به‌ویژه (E) پوشش استم (به‌ویژه تنها پوشش استم) گروه G است.

1-Nonabelian tensor product

ج) اگر G یک گروه کامل باشد آنگاه G دارای توسیع مرکزی جهانی است. به‌ویژه، برای گروه کامل G دنباله دقیق $1 \to \ker[-,-] \to G \otimes G \xrightarrow{[-,-]} G \to 1$ توسیع مرکزی جهانی G است و $H_2(G,\mathbb{Z}) \simeq \ker[-,-]$.

ه) اگر G یک گروه کامل باشد و $G \simeq \frac{F}{R}$ که در آن F یک گروه آزاد است آنگاه توسیع مرکزی G با توسیع زیر یکریخت است:

$$1 \to \frac{[F,F] \cap R}{[F,R]} \to \frac{[F,F]}{[F,R]} \to G \to 1.$$

برهان. به مراجع [۶، ۷ و ۸] رجوع شود.

۲-نتایج اصلی

با استفاده از خاصیت تصویری گروه‌های آزاد و با استناد به گزاره ۱-۱ (ه)، در مرجع [۹] ثابت شده است که اگر $(E)\ 1 \to A \to H \xrightarrow{\pi} G \to 1$ توسیع مرکزی جهانی گروه کامل G باشد آنگاه هر خودریختی $\alpha \in Aut(G)$ را می‌توان به خودریختی $\beta \in Aut(H)$ چنان ارتقا داد که $\alpha\pi = \pi\beta$. برای اطلاعات بیشتر مرجع[۱۰] را ببینید. در اینجا با شیوه‌ای جدید ثابت می‌کنیم چنین خودریختی موجود و به‌علاوه همواره یکتاست.

قضیه ۱-۲. *فرض کنید G یک گروه کامل و $(E)\ 1 \to A \to H \xrightarrow{\pi} G \to 1$ توسیع مرکزی جهانی G باشد. در این صورت برای هر خودریختی $\alpha \in Aut(G)$ خودریختی یکتای $\beta \in Aut(H)$ موجود است که $\beta(A) = A$ و $\alpha\pi = \pi\beta$.*

برهان. برای اثبات وجود β ابتدا یادآوری می‌کنیم که طبق قضیه ۱-۱ توسیع مرکزی جهانی G با توسیع مرکزی $1 \to \ker[-,-] \to G \otimes G \xrightarrow{[-,-]} G \to 1$ یکریخت است. حال برای هر $\alpha \in Aut(G)$ قرار می‌دهیم $\beta = \alpha \otimes \alpha : G \otimes G \to G \otimes G$ که در آن β برای هر $g_1, g_2 \in G$ به‌صورت $\beta(g_1 \otimes g_2) = \alpha(g_1) \otimes \alpha(g_2)$ تعریف می‌شود. حال دنباله دقیق زیر موجود است (برای اطلاعات بیشتر درباره این دنباله [۱۱] را ببینید.)

$$1 \to \ker\alpha \otimes G \times G \otimes \ker\alpha \to G \otimes G \xrightarrow{\beta} G \otimes G \to 1$$

ازآنجاکه α یک خودریختی است نتیجه می‌گیریم $\beta \in Aut(G \otimes G)$. به‌سادگی بررسی می‌شود که β نمودار زیر را جابجا می‌کند و به‌ویژه داریم $\beta(M) = M$ که در آن $M = \ker([-,-])$.

$$\begin{array}{ccccccccc} ۱ & \to & M & \to & G \otimes G & \xrightarrow{[-,-]} & G & \to & ۱ \\ & & \downarrow & & {}^{\beta}\!\downarrow & & {}^{\alpha}\!\downarrow & & \\ ۱ & \to & M & \to & G \otimes G & \xrightarrow{[-,-]} & G & \to & ۱ \end{array}$$

در ادامه ثابت می‌کنیم خودریختی β تعریف‌شده با شرایط فوق یکتاست. ابتدا یادآوری می‌کنیم که مطابق قسمت اول برهان، خودریختی $\alpha^{-۱} \in Aut(G)$ خودریختی $\delta \in Aut(G \otimes G)$ را به‌گونه‌ای القا می‌کند که $\alpha^{-۱}[-,-] = [-,-]\delta$ و $\delta(M) = M$. ثابت می‌کنیم $\delta = \beta^{-۱}$. داریم

$$(\alpha^{-۱}\alpha)[-,-] = \alpha^{-۱}[-,-]\beta = [-,-]\delta\beta$$

به عبارتی نمودار زیر جابجایی است:

$$\begin{array}{ccccccccc} ۱ & \to & M & \to & G \otimes G & \xrightarrow{[-,-]} & G & \to & ۱ \\ & & \downarrow & & {}^{\delta\beta}\!\downarrow & & {}^{\alpha^{-۱}\alpha}\!\downarrow & & \\ ۱ & \to & M & \to & G \otimes G & \xrightarrow{[-,-]} & G & \to & ۱ \end{array}$$

اما نمودار بالا با تعویض $\delta\beta$ با $Id_{G \otimes G}$ نیز جابجا می‌شود و ازآنجاکه سطر اول نمودار پوشش جهانی G است بنابراین $\delta\beta = Id_{G \otimes G}$. به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که $\beta\delta = Id_{G \otimes G}$.

حال فرض کنید $\beta_۱, \beta_۲ \in Aut(G \otimes G)$ به‌گونه‌ای باشند که نمودار زیر برای هر دو خودریختی $\beta_۱, \beta_۲$ جابجایی باشد:

$$\begin{array}{ccccccccc} ۱ & \to & M & \to & G \otimes G & \xrightarrow{[-,-]} & G & \to & ۱ \\ & & \downarrow & & {}^{\beta_۱}\!\downarrow\downarrow^{\beta_۲} & & {}^{\alpha}\!\downarrow & & \\ ۱ & \to & M & \to & G \otimes G & \xrightarrow{[-,-]} & G & \to & ۱ \end{array}$$

خودریختی $\alpha^{-۱}$ خودریختی $\beta_۱^{-۱}$ را القا می‌کند و نمودار زیر جابجایی است:

$$\begin{array}{ccccccccc} ۱ & \to & M & \to & G \otimes G & \xrightarrow{[-,-]} & G & \to & ۱ \\ & & \downarrow & & {}^{\beta_۱\beta_۱^{-۱}}\!\downarrow\downarrow^{\beta_۲\beta_۱^{-۱}} & & \downarrow^{\alpha\alpha^{-۱}} & & \\ ۱ & \to & M & \to & G \otimes G & \xrightarrow{[-,-]} & G & \to & ۱ \end{array}$$

حال چون سطر اول نمودار بالا توسیع مرکزی جهانی G است داریم $\beta_۱^{-۱}\beta_۲ = \beta_۱^{-۱}\beta_۱$ و لذا $\beta_۱ = \beta_۲$.

نتیجه ۲-۲. *فرض کنید G گروهی کامل و $1\to A \to H \xrightarrow{\pi} G \to 1$ پوشش جهانی G است. در این صورت $Aut(G)$ با زیرگروهی از $Aut(H)$ که A را ثابت نگه می‌دارد یکریخت است. به‌ویژه اگر G حاصل‌ضرب مستقیم تعدادی گروه ساده باشد آنگاه $Aut(G)\simeq Aut(H)$.*

برهان. برهان قسمت اول بلافاصله از قضیه ۱-۲ نتیجه می‌شود. اما هرگاه برای هر $1\le i\le n$، G_i گروهی ساده و $1\to A_i \to H_i \xrightarrow{\pi_i} G_i \to 1$ توسیع مرکزی جهانی G_i باشد آنگاه طبق قضیه شور-کونث[1] داریم

$$H_2(G_1\times\cdots\times G_n,\mathbb{Z})\simeq H_2(G_1,\mathbb{Z})\times\cdots\times H_2(G_n,\mathbb{Z})\times\prod_{1\le i<j\le n}\frac{G_i}{[G_i,G_i]}\otimes\frac{G_j}{[G_j,G_j]}$$
$$=H_2(G_1,\mathbb{Z})\times\cdots\times H_2(G_n,\mathbb{Z})\simeq A_1\times\cdots\times A_n$$

لذا دنباله دقیق

$$1\to A_1\times\cdots\times A_n \to H_1\times\cdots\times H_n \xrightarrow{\pi_1\times\cdots\times\pi_n} G_1\times\cdots\times G_n = G\to 1$$

توسیع مرکزی جهانی G است. حال با توجه به ساده بودن G_i بایستی داشته باشیم $A_i = Z(H_i)$ و لذا $A_1\times\cdots\times A_n = Z(H_1\times\cdots\times H_n)$. اما پایا بودن مرکز یک گروه تحت هر خودریختی از آن گروه و قسمت اول حکم را نتیجه می‌دهد.

مثال زیر نشان می‌دهد که قسمت دوم نتیجه ۲-۲ برای حاصل‌ضرب تعدادی گروه کامل غیر ساده درست نیست.

مثال ۳-۲. فرض کنید G گروه کاملی باشد که ضربگر شور غیر بدیهی دارد و فرض کنید $1\to A \to H \xrightarrow{\pi} G \to 1$ پوشش جهانی G باشد. ازآنجاکه H دارای ضربگر شور بدیهی است لذا دنباله

$$1\to A\times 1\to H\times H \xrightarrow{\pi\times \mathrm{Id}} G\times H\to 1$$

توسیع مرکزی جهانی گروه کامل $G\times H$ است. در این صورت بدیهی است که خودریختی $\beta\in Aut(H\times H)$ با ضابطه $\beta(x,y)=(y,x)$ توسط هیچ خودریختی از $G\times H$ القا نمی‌شود و بنابراین $Aut(H\times H)\not\leq Aut(G\times H)$.

1-Schur-Kunneth

یادآوری می‌کنیم که گروه کامل متناهی G یک گروه بسته مرکزی[1] نامیده می‌شود هرگاه از $G \simeq E/Z$ و $Z \subseteq [E,E] \cap Z(E)$ بتوان نتیجه گرفت $Z = ۱$. به‌سادگی می‌توان دید که بسته مرکزی بودن گروه G با بدیهی بودن ضربگر شور G هم‌ارز است. نتیجه زیر قضیه اصلی مقاله [۱۲] است که تامپسون آن را با روشی متفاوت با آنچه در اینجا آمده و با استفاده از نمایش آزاد گروه‌ها ثابت کرده است.

نتیجه۴-۲. *فرض کنید G یک گروه بسته مرکزی و $Z_۱, Z_۲$ دو زیرگروه مرکزی G باشند به‌طوری‌که $\frac{G}{Z_۱} \simeq \frac{G}{Z_۲}$. در این صورت خودریختی $\theta \in Aut(G)$ موجود است که $\theta(Z_۱) = Z_۲$.*

برهان. چون برای $i = ۱,۲$، Z_i یک زیرگروه مرکزی گروه بسته مرکزی G است لذا طبق نتیجه ۲,۱۰,۴ از [۸] داریم $H_۲(\frac{G}{Z_i}, \mathbb{Z}) \simeq Z_i$ و بنابراین دنباله دقیق زیر توسیع مرکزی جهانی $\frac{G}{Z_i}$ است:

$$۱ \to Z_i \to G \xrightarrow{\pi} \frac{G}{Z_i} \to ۱.$$

حال طبق قضیه ۲-۱ برای یکریختی $\alpha : \frac{G}{Z_۱} \to \frac{G}{Z_۲}$ خودریختی $\theta \in Aut(G)$ موجود است که $\theta(Z_۱) = Z_۲$.

تعریف ۵-۲. فرض کنید $(E)\ ۱ \to A \to H \xrightarrow{\pi} G \to ۱$ یک توسیع مرکزی از گروه G باشد. گوییم توسیع E در شرط (*) صدق می‌کند هرگاه برای هر خودریختی $\alpha \in Aut(G)$ و هر توسیع مرکزی $۱ \to A_۱ \to H_۱ \xrightarrow{\pi_۱} G \to ۱$ همریختی منحصربه‌فرد $\theta : H \to H_۱$ موجود باشد به‌طوری‌که نمودار زیر جابجایی باشد:

$$\begin{array}{ccccccccc} ۱ & \to & A & \to & H & \xrightarrow{\pi} & G & \to & ۱ \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \\ ۱ & \to & A_۱ & \to & H_۱ & \xrightarrow{\pi_۱} & G & \to & ۱ \end{array}$$

1-Centrally closed

واضح است که اگر گروه G دارای توسیعی باشد که در شرط $(*)$ صدق کند آنگاه با انتخاب $\alpha = Id$ و بنا بر گزاره ۱-۱ می‌توان نتیجه گرفت که G گروهی کامل است. در ادامه نشان می‌دهیم هر گروه کامل دارای توسیعی است که در شرط $(*)$ صدق می‌کند.

قضیه ۶-۲. *فرض کنید G گروهی کامل و $(E)\ ۱ \to A \to H \overset{\pi}{\to} G \to ۱$ توسیع مرکزی جهانی G باشد. در این صورت E در شرط $(*)$ صدق می‌کند.*

برهان. چون E توسیع مرکزی جهانی G است، همریختی منحصربه‌فرد $\alpha : H \to H_۱$ وجود دارد به‌طوری‌که نمودار زیر جابجایی باشد:

$$\begin{array}{ccccccccc} ۱ & \to & A & \to & H & \overset{\pi}{\to} & G & \to & ۱ \\ & & \downarrow & & {\scriptstyle \beta_۱}\downarrow & & {\scriptstyle Id}\downarrow & & \\ ۱ & \to & A_۱ & \to & H_۱ & \overset{\pi_۱}{\to} & G & \to & ۱ \end{array}$$

از طرفی طبق قضیه ۱-۲، خودریختی α خودریختی منحصربه‌فرد $\beta_۲ \in Aut(H)$ را القا می‌کند که نمودار زیر را جابجا کند

$$\begin{array}{ccccccccc} ۱ & \to & A & \to & H & \overset{\pi}{\to} & G & \to & ۱ \\ & & \downarrow & & {\scriptstyle \beta_۲}\downarrow & & {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & \\ ۱ & \to & A & \to & H & \overset{\pi}{\to} & G & \to & ۱ \end{array}$$

حال با قرار دادن $\theta = \beta_۱\beta_۲$ همریختی مطلوب به دست می‌آید. همریختی θ با شرط فوق منحصربه‌فرد است زیرا اگر $\theta_۱, \theta_۲$ همریختی‌هایی باشند که برای $i = ۱,۲$، $\pi_۱\theta_i = \alpha\pi$ آنگاه داریم

$$\pi_۱\theta_i\beta_۲^{-۱} = \alpha\pi\beta_۲^{-۱} = \pi\beta_۲\beta_۲^{-۱} = \pi$$

این یعنی نمودار

$$\begin{array}{ccccccccc} ۱ & \to & A & \to & H & \overset{\pi}{\to} & G & \to & ۱ \\ & & \downarrow & & {\scriptstyle \theta_i\beta_۲^{-۱}}\downarrow & & {\scriptstyle Id}\downarrow & & \\ ۱ & \to & A_۱ & \to & H_۱ & \overset{\pi_۱}{\to} & G & \to & ۱ \end{array}$$

با هر دو همریختی $\theta_۱\beta_۲^{-۱}, \theta_۲\beta_۲^{-۱}$ جابجا می‌شود اما با توجه به اینکه سطر اول نمودار توسیع مرکزی جهانی G است داریم $\theta_۱\beta_۲^{-۱} = \theta_۲\beta_۲^{-۱}$، که این حکم را نتیجه می‌دهد.

منابع

[1] Holt, D.F. and Plesken, W. (1989).*Perfect groups*, Clarendon Press, Oxford.

[2] Arias, D., Casas, J.M. and Ladra, M. (2007). On universal central extensions of precrossed and crossed modules, *J. Pure Appl. Algebra,***210**, 177–191.

[3] Casas, J.M. and Van der Linden, T. (2014). Universal central extensions in semi-abelian categories, *Appl. Category Struct*., **22**(1),253–268.

[4] Lassueur, C. and Thévenaz, J. (2017). Universal p′-central extensions,*Expositiones Mathematicae,***35**, 237-251.

[5] Donadze, G., Ladra, M. and Thomas, V. (2017). On some closure properties of the non-abelian tensor product, *J. Algebra*, **427**, 399-413.

[6] Brown, R. and Loday, J.L. (1987). Van Kampen theorems for diagrams of spaces, *Topology,***26**, 311-335.

[7] Brown, R., Johnson, D.L. and Robertson, E.F. (1987). Somecomputations of nonabelian tensor products of groups, *J. Algebra,***111**, 177–202.

[8] Karpilovsky, G. (1987). *The Schur Multiplier*, Clarendon Press, Oxford, UK.

[9] Alperin, J.L. and Gorenstein, D. (1966). The multiplicators of certainsimple groups, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **17**, 515-519.

[10] Moghaddam, M.R.R. and Salemkar, A.R. (2000).Varietal isologism and covering groups, *Arch. Math.* (Basel), **75**, 8-15.

[11] Brown, R., Johnson, D.L. andRobertson, E.F. (1987). Some computations of nonabelian tensor products of groups, *J. Algebra,***111**, 177–202.

[12] Thompson, J.G. (1973). Isomorphisms induced by automorphisms, *J. Austral. Math. Soc.,* **16**, 16-17.

Some Results on Perfect Groups

Hamid Mohammadzadeh and Behrouz Edalatzadeh

Department of Mathematics, University of Science and Technology of Mazandaran, Behshahr, Mazandaran, Iran

Department of Mathematics, University of Razi, Kermanshah. Iran

Abstract

Let G be a perfect group. In this paper we use a new method to prove that any automorphism of G can be lifted to a unique automorphism of its covering group. Also, we show that if G is a central factor of some group H then any automorphism of G can be lifted to a unique homomorphism from the covering group of G to H.

Keywords: Perfect group, Covering group, Automorphism.

Mathematics Subject Classification (2010): 11H56, 32M17.