برآورد $R = P(X > Y)$ در توزیع نمایی، بر اساس روش‌های E-بیز و بیز سلسله مراتبی

شهرام یعقوب زاده شهرستانی[۱]

گروه آمار، دانشگاه پیام نور صومعه‌سرا

تاریخ دریافت: تاریخ پذیرش:

چکیده: گاهی اوقات وسیع بودن حوزه تغییرات پارامتر روی فضای پارامتر، باعث افزایش خطای برآوردگر پسین بیزی برآورد بیز می‌شود که در این صورت، برآوردهای E-بیز و بیز سلسله مراتبی[۲] می‌تواند جانشین‌های مناسبی برای برآورد بیز باشند. بنابراین در این مقاله، وقتی‌که X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع‌های نمایی با پارامترهای مختلف می‌باشند، برآوردهای E-بیز و بیز سلسله مراتبی $R = P(X > Y)$، تحت تابع زیان مربع خطا به دست آورده می‌شود. سپس به کمک روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و دو مجموعه داده‌های واقعی، برآوردگرهای پیشنهادی باهم و با برآورد بیز R مقایسه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: برآورد E-بیز، برآورد بیز سلسله مراتبی، توزیع نمایی، تابع زیان مربع خطا، شبیه‌سازی مونت‌کارلو.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲C۱۰، ۶۲F۱۲.

۱- مقدمه

برآورد پارامتر قابلیت اعتماد یا پارامتر تنش-مقاومت، یعنی $R = P(X > Y)$ که کارایی یک سیستم را نشان می‌دهد یکی از مسائل مهم استنباط آماری است که در علوم مختلفی مانند نظریه طول عمر، قابلیت اطمینان مکانیکی یک سیستم، در مفاهیم مهندسی مانند سازه‌ها، فرسودگی موتور موشک و فرسودگی سازه‌های هواپیما کاربرد دارد. در قابلیت اعتماد، پارامتر تنش-مقاومت، توصیف‌کننده طول عمر یک سیستم است وقتی‌که سیستم، مقاومت تصادفی X را در برابر تنش تصادفی Y به کار می‌برد. همچنین سیستم دچار اختلال شده و از کار می‌افتد،

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: yagoubzade@gmail.com

2- Hierarchical Bayesian

اگر و فقط اگر در هر زمان، تنش بتواند بر مقاومت سیستم غلبه کند یا به‌عبارت‌دیگر $X>Y$. نویسندگان بسیاری به برآورد پارامتر قابلیت اعتماد R، وقتی‌که X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و دارای یک نوع توزیع می‌باشند، پرداخته‌اند. برآورد R در توزیع نمایی دومتغیره توسط آواد و همکاران [۱]، در توزیع نرمال چند متغیره توسط گوپتا و گوپتا [۲]، در توزیع بور نوع ۱۲ توسط رکب و کاندو [۳]، در توزیع نمایی تعمیم‌یافته توسط کاندو و گوپتا [۴]، در توزیع نمایی سه پارامتری توسط رکب و همکاران [۵]، در توزیع نمایی تعمیم‌یافته بر مبنای نمونه‌های رکوردی توسط باکلیزی [۶]، در توزیع وایبول بر اساس نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دوم توسط اصغر زاده و همکاران [۷]، در توزیع نمایی بر مبنای نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دوم توسط لیو و تسای [۸]، در توزیع لیندلی توسط ال-موتایری و همکاران [۹] و در توزیع لیندلی توانی توسط گیتانی و همکاران [۱۰] موردبررسی قرار گرفت.

از دیرباز روش‌های مختلفی برای برآورد پارامترهای توزیع‌های آماری ارائه‌شده است. یکی از این روش‌ها، روش برآورد بیز مبتنی بر توزیع‌های پیشین است که انتخاب معقول آن‌ها روی فضای پارامتر، نقش مهمی در کاهش خطای برآوردگر پسین بیزی دارد. گاهی اوقات وسیع بودن حوزه تغییرات پارامتر روی فضای پارامتر، باعث افزایش خطا و بزرگ شدن معیارهای مقایسه می‌شود. بنابراین، تعریف توزیع پیشین مناسب روی فضای پارامتر و اعمال شرایطی خاص روی ابر پارامترهای توزیع پیشین، نقش مهمی در کاهش معیارهای مقایسه دارد. برآوردهای بیز تجربی[۱] و بیز سلسله مراتبی[۲] از این نوع هستند. توزیع پیشین بیز سلسله مراتبی ابتدا توسط لیندلی و اسمیت [۱۱] معرفی شد و سپس توسط هان [۱۲] موردبررسی بیشتری قرار گرفت و روش‌های E-بیز و بیز سلسله مراتبی معرفی شدند. اخیراً از روش‌های E-بیز و بیز سلسله مراتبی برای برآورد پارامتر توزیع نمایی و برای برآورد پارامتر نسبت توزیع دوجمله‌ای توسط هان [۱۳-۱۴]، برای برآورد پارامتر و تابع قابلیت اعتماد توزیع بور نوع ۱۲، بر اساس نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دوم توسط جاهین و اکاشا [۱۵] و برای برآورد پارامتر توزیع پاسکال توسط وانگ و همکاران [۱۶] و یوسف زاده [۱۷] مورداستفاده قرارگرفته شد.

برآورد R به روش‌های مختلف در توزیع‌های متفاوت محاسبه شد، اما تاکنون برآوردهای E-بیز و بیز سلسله مراتبی آن در هیچ توزیعی به دست آورده نشد. در این مقاله، وقتی‌که X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و به ترتیب دارای توزیع‌های نمایی با پارامترهای θ_1 و θ_2 می‌باشند، برآوردهای E-بیز و بیز سلسله مراتبی $R=P(X>Y)$، تحت تابع زیان درجه دوم خطا به دست آورده می‌شود. همچنین در این مقاله، توزیع نمایی با پارامتر θ به ترتیب با تابع چگالی احتمال و تابع توزیع

1- Emperical Bayesian

$$f(x;\theta)=\theta e^{-\theta x}, x>0, \theta>0 \qquad (۱)$$

$$F(x;\theta)=1-e^{-\theta x}, x>0, \theta>0 \qquad (۲)$$

در نظر گرفته‌شده و با نماد $E(\theta)$ نشان داده می‌شود. در این مقاله، وقتی‌که X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و به ترتیب دارای توزیع‌های $E(\theta_1)$ و $E(\theta_2)$ هستند، برآوردهای E-بیز و بیز سلسله مراتبی $R=P(X>Y)$، تحت تابع زیان درجه دوم خطا یعنی $L(\hat{\theta},\theta)=(\hat{\theta}-\theta)^2$ به ترتیب در بخش‌های دوم و سوم به دست آورده می‌شود. همچنین در این بخش‌ها فرض می‌شود θ_1 و θ_2، پارامترهای مستقل از هم هستند و دارای توزیع‌های پیشین به ترتیب زیر

$$\pi_1(\theta_1|a_1,b_1)=\frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)}\theta_1^{a_1-1}e^{-b_1\theta_1}, \theta_1>0, a_1>0, b_1>0 \qquad (۳)$$

$$\pi_2(\theta_2|a_2,b_2)=\frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)}\theta_2^{a_2-1}e^{-b_2\theta_2}, \theta_2>0, a_2>0, b_2>0 \qquad (۴)$$

می‌باشند. با توجه به هان [۱۲]، در رابطه (۳)، a_1 و b_1 طوری در نظر گرفته می‌شود که $\pi_1(\theta_1|a_1,b_1)$ نسبت به θ_1 کاهشی باشد بنابراین با توجه به رابطه

$$\frac{d\pi_1(\theta_1|a_1,b_1)}{d\theta_1}=\frac{b_1^{a_1}\theta_1^{a_1-2}e^{-b_1\theta_1}}{\Gamma(a_1)}((a_1-1)-b_1\theta_1)$$

باید $b_1>0$ و $0<a_1\leq 1$ باشد. برگر [۱۸] نشان داد که بزرگ شدن b_1 باعث می‌شود، کارایی برآوردگر بیز θ_1 کاهش یابد، بنابراین ابر پارامتر b_1 باید از بالا کران‌دار شده و به‌صورت $0<b_1<c_1$ که c_1 عددی ثابت است در نظر گرفته شود درنتیجه با توجه به هان [۱۴]، b_1 به‌صورت یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0,c_1)$ یعنی $\pi_2(b_1)=\frac{1}{c_1}$ و $0<b_1<c_1$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین با توجه به‌شرط $0<a_1\leq 1$، بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم $a_1=1$ باشد که در این صورت رابطه (۳) به‌صورت

$$\pi_1(\theta_1|b_1)=b_1e^{-b_1\theta_1}, \theta_1>0, b_1>0 \qquad (۵)$$

تبدیل می‌شود. با استدلالی مشابه استدلال فوق درباره a_2 و b_2 در رابطه (۴)، توزیع $\pi_4(b_2)$ b_2 توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0,c_2)$ که c_2 عددی ثابت است در نظر گرفته می‌شود و با انتخاب $a_2=1$، رابطه (۴) به‌صورت

$$\pi_2(\theta_2|b_2)=b_2e^{-b_2\theta_2}, \theta_2>0, b_2>0 \qquad (۶)$$

تبدیل می‌شود. در بخش چهارم با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو و دو مجموعه داده‌های واقعی، برآوردگرهای بیز، E-بیز و بیز سلسله مراتبی R باهم مقایسه می‌شوند. بخش پنجم هم به نتایج مقاله اختصاص داده‌شده است.

۲- برآورد E-بیز پارامتر R

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $E(\theta_1)$ و $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ یک نمونه تصادفی از توزیع $E(\theta_2)$ باشند که دو نمونه تصادفی مستقل از هم هستند، آنگاه با توجه به روابط (۵) و (۶) و تابع درستنمایی

$$L(\theta_1, \theta_2 \mid Z) = \theta_1^{n} \theta_2^{m} e^{\left(-\theta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i - \theta_2 \sum_{j=1}^{m} y_j\right)} \tag{۷}$$

توزیع پسین θ_1 و θ_2 به‌شرط داده‌ها برابر است با:

$$\pi^*(\theta_1, \theta_2 \mid Z) = \frac{(b_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i)^{n+1} (b_2 + \sum_{j=1}^{m} y_j)^{m+1}}{n!\, m!} \theta_1^{n} \theta_2^{m} e^{-\theta_1 (b_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i) - \theta_2 (b_2 + \sum_{j=1}^{m} y_j)} \tag{۸}$$

که در آن $Z = (X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ است. بنابراین با توجه به رابطه (۸)، برآورد بیز $R = P(X > Y) = \frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2}$، تحت تابع زیان درجه دوم خطا از رابطه

$$\hat{R}_B(b_1, b_2) = E_{\pi^*}(R \mid Z) = C \int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty} \frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \theta_1^{n} \theta_2^{m} e^{-\theta_1 (b_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i) - \theta_2 (b_2 + \sum_{j=1}^{m} y_j)} \, d\theta_2 \, d\theta_1 \tag{۹}$$

به دست می‌آید که در آن $C = (n!\, m!)^{-1} (b_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i)^{n+1} (b_2 + \sum_{j=1}^{m} y_j)^{m+1}$ است. به کمک تغییر متغیر $\theta_1 + \theta_2 = u$ و با فرض $C_1 = b_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$ داریم :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\theta_1^{n}}{\theta_1 + \theta_2} e^{-C_1 \theta_1} d\theta_1 = n!\, e^{C_1 \theta_2} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j} \theta_2^{\,n-j}}{j!\,(n-j)!} \int_{\theta_2}^{\infty} u^{j-1} e^{-C_1 u} du$$

با توجه به رابطه $\frac{a^p}{\Gamma(p)} \int_x^{\infty} t^{p-1} e^{-at} dt = e^{-ax} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(ax)^j}{j!}$ (صفحه ۱۳۵، بتمن [۱۹])، I به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$I=n!\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{(-1)^{n-j}\,\theta_2^{n+k-j}C_1^{\,k-j}}{k!\,j\,(n-j)!}$$

بنابراین با جایگذاری I در رابطه (۹) و با فرض $C_2=b_2+\sum_{j=1}^{m}y_j$ داریم:

$$\hat{R}_B(b_1,b_2)=\frac{1}{m!}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{(-1)^{n-j}\,\Gamma(m+n+k+2-j)}{k!\,j\,(n-j)!}\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{n+k+1-j} \qquad (10)$$

با توجه به هان [۱۲] برآورد بیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف۱: اگر b_1 و b_2 ابر پارامترهایی در توزیع پیشین θ و $\pi(b_1,b_2)$ توزیع پیشین توأم (b_1,b_2) و $\hat{\theta}_B(b_1,b_2)$ برآورد بیز θ باشند. آنگاه برآورد E-بیز پارامتر θ که با نماد $\hat{\theta}_{EB}$ نشان داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{EB}&=E_{\pi(b_1,b_2)}(\hat{\theta}_B(b_1,b_2))\\&=\iint\hat{\theta}_B(b_1,b_2)\pi(b_1,b_2)db_1db_2 \qquad b_1\in\Lambda_1,b_2\in\Lambda_2\end{aligned}$$

بنابراین با توجه به رابطه (۱۰) و تعریف۱، برآورد E-بیز R، تحت تابع زیان درجه دوم خطا برابر است با:

$$\begin{aligned}\hat{R}_{EB}&=\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\hat{R}_B(b_1,b_2)\pi(b_1,b_2)db_1db_2\\&=\frac{1}{m!\,c_1c_2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{(-1)^{n-j}\,\Gamma(m+n+k+2-j)}{k!\,j\,(n-j)!}\int_0^{c_2}\int_0^{c_1}\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{n+k+1-j}db_1db_2 \qquad (11)\\&=\frac{1}{m!\,c_1c_2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{(-1)^{n-j}\,\Gamma(m+n+k+2-j)}{k!\,j\,(n-j)!}g(j,k)h(j,k)\end{aligned}$$

که در آن داریم:

$$g(j,k)=\frac{(c_1+\sum_{i=1}^{n}x_i)^{n+k+2-j}-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^{n+k+2-j}}{n+k+2-j}$$

$$h(j,k)=\frac{(\sum_{i=1}^{m}y_i)^{-(n+k-j)}-(c_2+\sum_{i=1}^{m}y_i)^{-(n+k-j)}}{n+k-j}$$

۳- برآورد بیز سلسله مراتبی R

در این بخش برآورد بیز سلسله مراتبی R، تحت تابع زیان درجه دوم خطا به دست آورده می‌شود. با توجه به هان [۱۲] توزیع پیشین سلسله مراتبی به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف۲: فرض کنید λ یک ابر پارامتر در تابع چگالی احتمال پیشین θ یعنی $\pi(\theta|\lambda)$ و $\pi'(\lambda)$، تابع چگالی پیشین ابر پارامتر λ باشد، آنگاه تابع چگالی احتمال پیشین سلسله مراتبی θ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\pi''(\theta)=\int_{\Lambda}\pi(\theta|\lambda)\pi'(\lambda)d\lambda,\quad \lambda\in\Lambda$$

بنابراین با توجه به روابط (۵) و (۶) و تعریف۲، توزیع‌های پیشین سلسله مراتبی پارامترهای θ_1 و θ_2 عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}\pi_5(\theta_1)&=\int_0^{c_1}\pi_1(\theta_1|b_1)\pi_3(b_1)db_1=\frac{1-c_1\theta_1e^{-c_1\theta_1}-e^{-c_1\theta_1}}{c_1\theta_1^2}\\ \pi_6(\theta_2)&=\int_0^{c_2}\pi_2(\theta_2|b_2)\pi_4(b_2)db_2=\frac{1-c_2\theta_2e^{-c_2\theta_2}-e^{-c_2\theta_2}}{c_2\theta_2^2}\end{aligned}\tag{12}$$

بنابراین با توجه به روابط (۷) و (۱۲)، تابع چگالی احتمال پسین سلسله مراتبی θ_1 و θ_2 به‌شرط داده‌ها به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}\pi^{**}(\theta_1,\theta_2|Z)&=\frac{\theta_1^n\theta_2^m e^{-(n\bar{x}\theta_1+m\bar{y}\theta_2)}S(\theta_1,\theta_2)}{\int_0^\infty\int_0^\infty\theta_1^n\theta_2^m e^{-(n\bar{x}\theta_1+m\bar{y}\theta_2)}S(\theta_1,\theta_2)d\theta_1d\theta_2}\\ &=\frac{\theta_1^n\theta_2^m e^{-(n\bar{x}\theta_1+m\bar{y}\theta_2)}S(\theta_1,\theta_2)}{K_nK_m}\end{aligned}$$

که در آن

$$S(\theta_1,\theta_2)=\frac{(1-c_1\theta_1e^{-c_1\theta_1}-e^{-c_1\theta_1})(1-c_2\theta_2e^{-c_2\theta_2}-e^{-c_2\theta_2})}{c_1c_2\theta_1^2\theta_2^2}$$

$$K_n=\frac{(n-2)!}{c_1}\left[\frac{1}{(n\bar{x})^{n-1}}-\frac{nc_1}{(C_1+c_1)^n}-\frac{1}{(C_1+c_1)^{n-1}}\right]$$

$$K_m=\frac{(m-2)!}{c_2}\left[\frac{1}{(m\bar{y})^{m-1}}-\frac{mc_2}{(C_2+c_2)^n}-\frac{1}{(C_2+c_2)^{m-1}}\right]$$

می‌باشند. بنابراین با توجه به $\pi^{**}(\theta_1,\theta_2|Z)$، برآورد بیز سلسله مراتبی R، تحت تابع زیان درجه دوم خطا که با نماد $\hat{R}_{HB}$ نشان داده می‌شود به‌صورت زیر به دست آورده می‌شود.

$$\hat{R}_{HB}=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2}\pi^{**}(\theta_1,\theta_2|Z)d\theta_1 d\theta_2 \quad (13)$$

برای محاسبه $\hat{R}_{HB}$، ابتدا انتگرال زیر به کمک تغییر متغیر $\theta_1+\theta_2=u$ محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{c_1}\int_0^\infty\frac{1}{\theta_1+\theta_2}\left[\theta_1^{n-2}e^{-n\theta_1\bar{x}}-c_1\theta_1^{n-1}e^{-c_3\theta_1}-\theta_1^{n-2}e^{-c_3\theta_1}\right]d\theta_1\\&=\frac{1}{c_1}e^{n\theta_2\bar{x}}\sum_{j=0}^{n-2}(-1)^j\binom{n-2}{j}\theta_2^{\,j}\int_{\theta_2}^\infty u^{n-3-j}e^{-nu\bar{x}}du-e^{\theta_2C_3}\\&\times\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}\theta_2^{\,j}\int_{\theta_2}^\infty u^{n-2-j}e^{-uC_3}du\\&-\frac{1}{c_1}e^{\theta_2C_3}\sum_{j=0}^{n-2}(-1)^j\binom{n-2}{j}\theta_2^{\,j}\int_{\theta_2}^\infty u^{n-3-j}e^{-uC_3}du\\&=\frac{(n-2)!}{c_1}\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{n-3-j}\frac{(-1)^j\theta_2^{\,j+k}}{j!k!(n-3-j)}\left[(n\bar{x})^{j+k+2-n}-C_3^{\,j+k+2-n}\right]\\&-(n-1)!\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-2-j}\frac{(-1)^j\theta_2^{\,j+k}C_3^{\,j+k+1-n}}{j!k!(n-2-j)}\end{aligned}$$

به‌طوری‌که $C_3=c_1+\sum_{i=1}^{m}X_i$ است. با توجه به I و بتمن [۱۹]، رابطه (۱۳) به‌صورت زیر نوشته و محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}\hat{R}_{HB}&=\frac{1}{c_2K_nK_m}\int_0^\infty I\left[\theta_2^{m-2}e^{-\theta_2\bar{y}}-c_2\theta_2^{m-1}e^{-C_4\theta_2}-\theta_2^{m-2}e^{-C_4\theta_2}\right]d\theta_2\\&=\frac{1}{c_2K_nK_m}\left\{\frac{(n-2)!}{c_1}\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{n-3-j}\frac{(-1)^j\left[(n\bar{x})^{j+k+2-n}-C_3^{\,j+k+2-n}\right]}{j!k!(n-3-j)}K(j,k)\right.\\&\left.-(n-1)!\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-2-j}\frac{(-1)^jC_3^{\,j+k+1-n}}{j!k!(n-2-j)}K(j,k)\right\}\end{aligned} \quad (14)$$

به‌طوری‌که $C_4 = c_2 + \sum_{j=1}^{m} y_j$ و

$$K(j,k) = \frac{\Gamma(m+j+k-1)}{\bar{y}^{m+j+k-1}} - \frac{c_2\Gamma(m+j+k)}{C_4^{\,m+j+k}} - \frac{\Gamma(m+j+k-1)}{C_4^{\,m+j+k-1}}$$

می‌باشند.

۴- تحلیل داده‌ها

در این بخش با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو و دو مجموعه داده‌های واقعی، برآوردهای بیز، E-بیز و بیز سلسله مراتبی R باهم مقایسه می‌شوند.

۴-۱- مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش، در مرحله اول از توزیع $E(\theta_1)$ توسط رابطه $X = -\frac{1}{\theta_1}\log(1-U)$ به ازای $\theta_1 = 1/5$ و از توزیع $E(\theta_2)$ توسط رابطه $Y = -\frac{1}{\theta_2}\log(1-V)$ به ازای $\theta_2 = 2/5$ که U و V توزیع یکنواخت استاندارد دارند، نمونه‌های تصادفی با حجم‌های متفاوت تولید می‌شوند. در مرحله دوم به ازای $(c_1,c_2) = (2,3),(4,4)$ و به کمک توزیع‌های $\pi_3(b_1) = \frac{1}{c_1}, 0 < b_1 < c_1$ و $\pi_4(b_2) = \frac{1}{c_2}, 0 < b_2 < c_2$ به ترتیب b_1 و b_2 تولید می‌شوند. در مرحله سوم، به کمک روابط (۱۰)، (۱۱) و (۱۴)، برآوردهای بیز، E-بیز و بیز سلسله مراتبی R به دست آورده می‌شوند. مراحل اول و سوم را ۱۰۰۰ بار تکرار نموده و میانگین اریبی برآوردهای اشاره‌شده R و میانگین مربع خطای آن‌ها به دست آورده می‌شوند. نتایج شبیه‌سازی در جدول‌های ۱ و ۲ آورده شده است.

جدول (۱): میانگین اریبی برآوردگرهای R با میانگین مربع خطای آن‌ها (داخل پرانتز)، تحت تابع زیان درجه دوم خطا برای $(c_{۱},c_{۲})=(۲,۳)$ و (n,m) ها و $(b_{۱},b_{۲})$ های مختلف

(n,m)	$(b_{۱},b_{۲})$	$\hat{R}_B$	$\hat{R}_{EB}$	$\hat{R}_{HB}$
(۶۰، ۲۰)	(۰/۴، ۰/۱)	−۰/۴۲۷۹۴ (۰/۰۳۸۹۱)	−۰/۳۴۰۱۶ (۰/۰۳۸۶۶)	−۰/۴۱۹۱۸ (۰/۱۲۲۸۵)
	(۱/۵، ۰/۵)	−۰/۳۵۸۸۹ (۰/۰۴۵۰۹)	−۰/۲۳۴۶۸ (۰/۰۳۷۳۸)	−۰/۳۰۸۰۳ (۰/۱۴۷۰۹)
	(۳، ۱/۵)	−۰/۲۲۰۲۹ (۰/۰۴۷۰۸)	−۰/۰۹۷۸۶ (۰/۰۳۱۰۹)	−۰/۰۶۱۵۸ (۰/۱۷۳۷۵)
	(۰/۵، ۰/۴)	−۰/۱۸۵۹۲ (۰/۰۶۱۸۲)	−۰/۱۱۰۵۸ (۰/۰۴۷۰۵)	۰/۲۰۹۳۸ (۰/۱۰۸۶۵)
	(۱/۵، ۱/۵)	−۰/۱۱۶۲۶ (۰/۰۵۷۴۴)	−۰/۰۳۵۸۳ (۰/۰۳۶۷۰)	۰/۲۷۰۰۵ (۰/۰۷۷۹۶)
	(۱، ۱/۵)	−۰/۰۳۵۰۲ (۰/۰۵۷۲۸)	۰/۰۱۴۹۴ (۰/۰۳۷۳۱)	۰/۰۳۳۸۵ (۰/۰۳۰۸۲)
	(۰/۵، ۱)	۰/۰۲۶۶۱ (۰/۰۵۷۹۵)	۰/۰۵۲۳۹ (۰/۰۴۱۰۸)	۰/۳۵۹۳۳ (۰/۰۱۴۹۸)
	(۰/۳، ۰/۷)	۰/۰۶۱۶۱ (۰/۰۵۵۸۴)	۰/۰۷۶۰۸ (۰/۰۴۱۰۲)	۰/۳۶۶۷۵ (۰/۰۰۹۳۸)
	(۰/۲، ۰/۶)	۰/۱۱۲۲۲ (۰/۰۴۹۶۵)	۰/۱۱۴۳۳ (۰/۰۳۸۵۹)	۰/۳۷۲۳۲ (۰/۰۰۳۶۳)
	(۰/۳، ۱/۲)	۰/۱۶۰۹۰ (۰/۰۴۳۱۶)	۰/۱۵۱۸۲ (۰/۰۳۳۵۱)	۰/۳۷۳۳۱ (۰/۰۰۱۸۶)
	(۰/۴، ۲)	۰/۱۸۸۳۷ (۰/۰۳۸۶۱)	۰/۱۷۱۸۶ (۰/۰۳۰۸۹)	۰/۳۷۳۹۸ (۰/۰۰۱۰۷)
(۸۰، ۴۰)	(۰/۴، ۰/۱)	−۰/۴۲۴۸۸ (۰/۰۳۰۳۷)	−۰/۳۵۹۵۱ (۰/۰۲۹۸۰)	−۰/۵۲۵۶۹ (۰/۰۵۶۷۱)
	(۱/۵، ۰/۵)	−۰/۳۶۸۰۲ (۰/۰۳۶۴۰)	−۰/۲۸۰۳۷ (۰/۰۳۱۶۸)	−۰/۴۷۲۸۹ (۰/۰۷۵۶۳)
	(۱/۵، ۰/۵)	−۰/۳۶۸۰۲ (۰/۰۳۶۴۰)	−۰/۲۸۰۳۷ (۰/۰۳۱۶۸)	−۰/۴۷۲۸۹ (۰/۰۷۵۶۳)
	(۳، ۱/۵)	−۰/۲۵۵۹۹ (۰/۰۳۹۳۸)	−۰/۱۶۸۶۳ (۰/۰۲۸۹۴)	−۰/۲۷۴۶۳ (۰/۱۲۴۳۳)
	(۰/۵، ۰/۴)	−۰/۱۸۴۱۶ (۰/۰۴۸۳۹)	−۰/۱۳۷۰۹ (۰/۰۳۸۶۹)	۰/۰۷۹۳۵ (۰/۱۲۴۵۵)
	(۱/۵، ۱/۵)	−۰/۱۲۰۶۹ (۰/۰۴۶۲۷)	−۰/۰۷۵۵۲ (۰/۰۳۳۰۸)	۰/۱۷۱۸۹ (۰/۰۹۲۵۵)
	(۱، ۱/۵)	۰/۰۳۵۱۹ (۰/۰۴۳۳۹)	۰/۰۳۶۳۴ (۰/۰۳۳۴۶)	۰/۳۰۱۲۰ (۰/۰۴۰۸۸)
	(۰/۳، ۰/۷)	۰/۰۶۹۸۵ (۰/۰۳۹۶۷)	۰/۰۶۳۸۸ (۰/۰۳۱۸۶)	۰/۳۶۰۸۴ (۰/۰۰۹۸۲)
	(۰/۲، ۰/۶)	۰/۱۲۰۷۶ (۰/۰۳۶۲۵)	۰/۱۰۶۱۴ (۰/۰۳۰۲۹)	۰/۳۷۱۱۶ (۰/۰۰۳۷۱)
	(۰/۳، ۱/۲)	۰/۱۶۹۵۴ (۰/۰۳۲۱۹)	۰/۱۴۴۸۳ (۰/۰۲۷۳۰)	۰/۳۷۲۰۶ (۰/۰۰۲۵۰)
	(۰/۴، ۲)	۰/۱۹۸۶۰ (۰/۰۲۸۲۹)	۰/۱۶۶۹۲ (۰/۰۲۴۵۳)	۰/۳۷۳۱۷ (۰/۰۰۱۳۱)
(۵۰، ۵۰)	(۰/۴، ۰/۱)	−۰/۴۲۱۸۹ (۰/۰۳۰۶۵)	−۰/۳۷۹۰۱ (۰/۰۲۸۶۱)	−۰/۵۹۵۷۹ (۰/۰۱۸۹۴)
	(۱/۵، ۰/۵)	−۰/۳۶۷۱۲ (۰/۰۳۵۳۹)	−۰/۳۱۴۶۳ (۰/۰۲۹۸۲)	−۰/۵۸۱۷۵ (۰/۰۲۴۲۱)
	(۳، ۱/۵)	−۰/۲۵۹۴۶ (۰/۰۴۰۹۱)	−۰/۲۱۹۶۱ (۰/۰۲۹۵۸)	−۰/۴۹۵۲۳ (۰/۰۶۵۸۹)
	(۰/۵، ۰/۴)	−۰/۱۷۹۵۴ (۰/۰۴۷۷۶)	−۰/۱۶۸۱۸ (۰/۰۳۷۸۹)	−۰/۲۲۳۴۹ (۰/۱۳۵۳۲)
	(۱/۵، ۱/۵)	−۰/۱۲۶۰۷ (۰/۰۴۸۱۳)	−۰/۱۲۵۷۷ (۰/۰۳۳۹۸)	−۰/۱۲۶۹۱ (۰/۱۴۰۵۹)
	(۱، ۱/۵)	−۰/۰۳۰۳۳ (۰/۰۴۶۴۸)	−۰/۰۵۵۰۴ (۰/۰۳۴۷۳)	۰/۱۳۷۸۳ (۰/۱۰۴۳۷)
	(۰/۵، ۱)	۰/۰۳۶۷۶ (۰/۰۴۵۵۹)	۰/۰۰۱۰۳ (۰/۰۳۵۱۳)	۰/۲۶۵۵۹ (۰/۰۵۹۷۶)
	(۰/۳، ۰/۷)	۰/۰۷۲۲۸ (۰/۰۴۱۸۳)	۰/۰۳۳۸۱ (۰/۰۳۵۰۴)	۰/۳۲۰۷۳ (۰/۰۳۶۳۶)
	(۰/۲، ۰/۶)	۰/۱۲۱۴۴ (۰/۰۳۷۷۴)	۰/۰۷۸۴۹ (۰/۰۳۳۱۵)	۰/۳۵۹۶۳(۰/۰۱۴۰۳)
	(۰/۳، ۱/۲)	۰/۱۶۹۲۳ (۰/۰۳۲۲۹)	۰/۱۱۵۰۵ (۰/۰۲۹۳۶)	۰/۳۶۳۰۷ (۰/۰۰۸۶۲)
	(۰/۴، ۲)	۰/۱۹۵۸۵ (۰/۰۲۸۱۰)	۰/۱۳۳۶۴ (۰/۰۲۶۲۳)	۰/۳۶۷۴۲ (۰/۰۰۵۲۶)
(۶۰، ۹۰)	(۰/۴، ۰/۱)	−۰/۴۲۱۴۶ (۰/۰۲۷۳۹)	−۰/۳۹۳۹۲ (۰/۰۲۵۸۵)	−۰/۶۱۲۵۱ (۰/۰۶۹۶)
	(۱/۵، ۰/۵)	−۰/۳۶۷۸۹ (۰/۰۳۱۱۸)	−۰/۳۳۸۷۷ (۰/۰۲۵۹۶)	−۰/۶۰۵۹۳ (۰/۰۰۹۸۲)
	(۳، ۱/۵)	−۰/۲۷۵۷۷ (۰/۰۳۵۳۶)	−۰/۲۶۱۸۶ (۰/۰۲۶۰۷)	−۰/۵۶۷۵۲ (۰/۰۲۸۳۳)
	(۰/۵، ۰/۴)	−۰/۱۷۷۱۸ (۰/۰۴۰۴۷)	−۰/۱۸۶۴۵ (۰/۰۳۲۴۲)	−۰/۳۸۸۰۱ (۰/۰۸۹۷۲)
	(۱/۵، ۱/۵)	−۰/۱۲۵۰۰ (۰/۰۴۰۹۹)	−۰/۱۵۰۵۱ (۰/۰۳۰۳۸)	−۰/۳۰۷۳۹ (۰/۱۰۵۶۵)
	(۱، ۱/۵)	−۰/۰۳۰۳۷ (۰/۰۳۸۸۳)	−۰/۰۷۶۸۹ (۰/۰۳۰۰۴)	−۰/۰۲۹۵۹ (۰/۱۱۴۷۴)
	(۰/۵، ۱)	۰/۰۳۹۰۴ (۰/۰۳۷۱۴)	−۰/۰۱۴۵۹ (۰/۰۳۰۸۲)	۰/۱۷۲۰۳ (۰/۰۸۲۵۷)
	(۰/۳، ۰/۷)	۰/۰۷۵۷۱ (۰/۰۳۴۶۶)	۰/۰۲۱۶۸ (۰/۰۳۰۰۳)	۰/۰۲۷۲۵ (۰/۰۵۱۸۱)
	(۰/۲، ۰/۶)	۰/۱۲۳۶۳ (۰/۰۳۱۴۰)	۰/۰۶۷۷۰ (۰/۰۲۸۵۷)	۰/۳۴۶۵۵ (۰/۰۲۰۵۶)
	(۰/۳، ۱/۲)	۰/۱۷۱۴۱ (۰/۰۲۶۷۶)	۰/۱۰۵۱۵ (۰/۰۲۵۳۳)	۰/۳۵۱۰۱ (۰/۰۱۳۷۹)
	(۰/۴، ۲)	۰/۱۹۸۸۳ (۰/۰۲۳۵۷)	۰/۱۲۵۱۷ (۰/۰۲۲۹۹)	۰/۳۵۹۲۹ (۰/۰۰۸۳۹)
	(۰/۲، ۱/۲)	۰/۲۲۹۰۳ (۰/۰۲۰۵۷)	۰/۱۶۵۷۹ (۰/۰۲۱۳۸)	۰/۳۷۱۱۹ (۰/۰۰۲۷۹)

جدول (۲): میانگین اریبی برآوردگرهای R با میانگین مربع خطای آن‌ها (داخل پرانتز) تحت تابع زیان درجه دوم برای $(c_۱,c_۲)=(۴,۴)$ و (n,m) ها و $(b_۱,b_۲)$ های مختلف

(n,m)	$(b_۱,b_۲)$	$\hat{R}_B$	$\hat{R}_{EB}$	$\hat{R}_{HB}$
(۹۰، ۳۰)	(۴، ۱)	-۰/۳۵۳۲۷ (۰/۰۳۲۰۲)	-۰/۲۱۷۶۵ (۰/۰۲۶۴۱)	-۰/۴۷۳۸۹ (۰/۰۸۱۱۴)
	(۴، ۲)	-۰/۲۰۸۰۸ (۰/۰۳۷۷۴)	-۰/۰۹۴۸۰ (۰/۰۲۵۴۹)	-۰/۰۸۱۲۹ (۰/۱۴۵۱۵)
	(۳، ۳)	-۰/۰۸۹۹۲ (۰/۰۴۱۹۷)	-۰/۰۱۳۶۱ (۰/۰۲۵۹۱)	۰/۲۶۹۱۵ (۰/۰۶۲۴۶)
	(۲، ۳)	-۰/۰۲۶۲۲ (۰/۰۴۵۵۳)	۰/۰۲۴۴۹ (۰/۰۲۸۶۷)	۰/۳۳۹۴۱ (۰/۰۲۴۶۷)
	(۱، ۲)	۰/۰۳۰۲۱ (۰/۰۴۵۹۱)	۰/۰۵۷۱۴ (۰/۰۳۱۵۴)	۰/۳۵۹۳۶ (۰/۰۱۱۲۵)
	(۰/۲، ۰/۵)	۰/۰۸۰۴۹ (۰/۰۴۳۲۵)	۰/۰۸۹۰۵ (۰/۰۳۰۰۹)	۰/۳۶۵۸۷ (۰/۰۰۶۴۵)
	(۱، ۳)	۰/۱۰۴۵۳ (۰/۰۳۹۰۱)	۰/۱۰۹۸۶ (۰/۰۲۷۲۵)	۰/۳۷۰۳۲ (۰/۰۰۱۷۹)
(۱۰۰، ۵۰)	(۴، ۱)	-۰/۳۷۹۴۱ (۰/۰۲۷۵۶)	-۰/۲۷۶۶۹ (۰/۰۲۴۰۲)	-۰/۵۵۶۳۳ (۰/۰۳۴۵۵)
	(۴، ۲)	-۰/۲۰۵۹۶ (۰/۰۲۵۱۹)	-۰/۰۹۳۲۴ (۰/۰۲۵۱۴)	-۰/۰۷۴۳۶ (۰/۱۱۳۱۲)
	(۳، ۳)	-۰/۱۰۸۵۹ (۰/۰۳۷۶۶)	-۰/۰۶۱۷۱ (۰/۰۲۵۴۶)	۰/۱۶۸۲۸ (۰/۰۸۴۵۳)
	(۲، ۳)	-۰/۰۳۱۳۰ (۰/۰۳۹۰۶)	-۰/۰۰۹۹۸ (۰/۰۲۷۰۴)	۰/۳۰۰۵۷ (۰/۰۲۴۲۴)
	(۱، ۲)	۰/۰۳۲۶۵ (۰/۰۳۷۸۰)	۰/۰۳۴۶۴ (۰/۰۲۸۱۵)	۰/۳۴۱۵۷ (۰/۰۱۷۴۷)
	(۰/۲، ۰/۵)	۰/۰۸۴۵۳ (۰/۰۳۶۰۹)	۰/۰۷۶۰۳ (۰/۰۲۹۹۴)	۰/۳۵۶۱۷ (۰/۰۱۰۳۵)
	(۱، ۳)	۰/۱۰۷۳۴ (۰/۰۳۲۵۲)	۰/۰۹۰۴۷ (۰/۰۲۴۹۲)	۰/۳۶۴۷۱ (۰/۰۰۵۶۳)
	(۰/۴، ۱/۶)	۰/۱۶۷۴۵ (۰/۰۲۸۲۵)	۰/۱۴۲۶۹ (۰/۰۲۳۹۲)	۰/۳۷۰۴۳ (۰/۰۰۲۵۵)
(۱۰۰، ۱۰۰)	(۴، ۱)	-۰/۴۰۰۷۸ (۰/۰۲۳۰۱)	-۰/۳۴۱۸۲ (۰/۰۲۰۱۷)	-۰/۶۰۸۱۳ (۰/۰۰۷۲۵)
	(۰/۳، ۰/۱)	-۰/۳۷۴۳۱ (۰/۰۲۶۷۳)	-۰/۳۴۰۷۱ (۰/۰۲۴۳۷)	-۰/۵۸۴۹۲ (۰/۰۱۶۷۶)
	(۳، ۱/۰۵)	-۰/۲۶۹۹۵ (۰/۰۲۹۴۷)	-۰/۳۰۰۴۳ (۰/۰۲۲۰۱)	-۰/۵۸۰۶۱ (۰/۰۱۸۳۹)
	(۴، ۲)	-۰/۲۶۹۹۵ (۰/۰۲۹۴۷)	-۰/۲۲۸۷۹ (۰/۰۲۲۲۹)	-۰/۵۰۶۷۳ (۰/۰۴۴۴۹)
	(۳، ۳)	-۰/۱۲۵۴۷ (۰/۰۳۱۹۷۷)	-۰/۱۲۵۳۳ (۰/۰۲۳۰۹)	-۰/۱۲۶۴۸ (۰/۱۰۰۹۴)
	(۱، ۲)	۰/۰۳۴۲۲ (۰/۰۳۱۱۴)	-۰/۰۰۱۰۸ (۰/۰۲۴۹۴)	۰/۲۵۶۲۳ (۰/۰۴۴۷۳)
	(۰/۲، ۰/۵)	۰/۰۸۸۰۸ (۰/۰۲۸۷۳)	۰/۰۵۴۷۹ (۰/۰۲۵۲۴)	۰/۳۰۸۵۹ (۰/۰۲۶۵۴)
	(۱، ۳)	۰/۱۰۹۱۳ (۰/۰۲۶۱۳)	۰/۰۵۸۰۴ (۰/۰۲۱۹۰)	۰/۳۳۶۰۶ (۰/۰۱۶۱۸)
	(۰/۵، ۲)	۰/۱۶۸۱۵ (۰/۰۲۲۶۳)	۰/۱۱۶۲۴ (۰/۰۲۰۶۵)	۰/۳۵۷۸۸ (۰/۰۰۷۳۹)
	(۰/۳، ۱/۵)	۰/۲۰۴۲۷ (۰/۰۱۹۷۵)	۰/۱۵۴۶۸ (۰/۰۱۹۰۷)	۰/۳۶۵۹۶ (۰/۰۰۳۹۲)
	(۰/۴، ۴)	۰/۲۷۰۶۴ (۰/۰۱۲۳۶)	۰/۲۱۴۸۶ (۰/۰۱۳۷۰)	۰/۳۷۳۸۸ (۰/۰۰۰۴۹)
(۵۰، ۷۵)	(۴، ۱)	-۰/۳۹۲۲۰ (۰/۰۳۰۲۹)	-۰/۳۴۹۸۱ (۰/۰۲۴۵۱)	-۰/۶۱۷۱۰ (۰/۰۰۴۶۳)
	(۳، ۱)	-۰/۳۵۳۷۹ (۰/۰۳۴۵۴)	-۰/۳۲۰۸۳ (۰/۰۲۶۹۷)	-۰/۶۰۶۶۲ (۰/۰۱۰۸۸)
	(۳، ۱/۰۵)	-۰/۳۴۴۸۹ (۰/۰۳۵۳۶)	-۰/۳۱۳۷۵ (۰/۰۲۷۳۲)	-۰/۶۰۳۹۳ (۰/۰۱۲۴۸)
	(۴، ۲)	-۰/۳۶۳۲۳ (۰/۰۳۷۲۱)	-۰/۲۵۰۵۷ (۰/۰۲۶۰۵)	-۰/۵۶۶۸۹ (۰/۰۳۱۲۷)
	(۴، ۴)	-۰/۱۴۴۱۹ (۰/۰۳۵۶۲)	-۰/۱۷۱۳۴ (۰/۰۲۳۳۵)	-۰/۳۱۱۹۱ (۰/۱۱۳۳۹)
	(۲، ۴)	-۰/۰۰۹۷۹ (۰/۰۳۶۵۹)	-۰/۰۷۵۰۹ (۰/۰۲۶۳۷)	۰/۱۳۶۴۱ (۰/۰۹۷۲۹)
	(۰/۲، ۰/۵)	۰/۰۸۹۴۱ (۰/۰۳۷۳۷)	۰/۰۳۵۹۷ (۰/۰۳۲۹۶)	۰/۲۳۲۱۷ (۰/۰۶۶۱۵)
	(۱، ۳)	-۰/۱۴۴۱۹ (۰/۰۳۵۶۲)	-۰/۱۷۱۳۴ (۰/۰۲۳۳۵)	-۰/۳۱۱۹۱ (۰/۱۱۳۳۹)
	(۱، ۴)	۰/۱۲۸۸۵ (۰/۰۲۸۶۵)	۰/۰۴۰۵۷ (۰/۰۲۴۴۹)	۰/۳۳۴۸۹ (۰/۰۲۱۴۲)
	(۰/۴، ۲)	۰/۱۹۷۰۵(۰/۰۲۵۸۷)	۰/۱۱۹۹۹ (۰/۰۲۵۱۴)	۰/۳۵۳۰۴ (۰/۰۱۲۴۴)
	(۰/۴، ۴)	۰/۲۵۸۱۵ (۰/۰۱۶۵۴)	۰/۱۷۷۴۹ (۰/۰۱۸۶۵)	۰/۳۷۲۲۱ (۰/۰۰۱۶۴)
(۵۰، ۱۰۰)	(۴، ۱)	-۰/۳۹۹۵۱ (۰/۰۲۸۵۴)	-۰/۳۷۲۳۵ (۰/۰۲۲۶۱)	-۰/۶۲۰۶۶ (۰/۰۰۲۳۹)
	(۳، ۱)	-۰/۳۵۷۳۹ (۰/۰۳۲۸۹)	-۰/۳۴۰۵۲ (۰/۰۲۵۲۰)	-۰/۶۱۶۶۸ (۰/۰۰۵۷۸)
	(۳، ۱/۰۵)	-۰/۳۴۹۳۰ (۰/۰۳۳۰۷)	-۰/۳۳۴۲۷ (۰/۰۲۵۱۲)	-۰/۶۱۳۳۲ (۰/۰۰۶۴۵)
	(۴، ۲)	-۰/۲۷۱۷۰ (۰/۰۳۶۱۱)	-۰/۲۷۷۳۶ (۰/۰۲۵۰۴)	-۰/۵۹۱۹۸ (۰/۰۱۷۹۸)
	(۴، ۴)	-۰/۱۵۴۵۰ (۰/۰۳۳۷۷)	-۰/۱۹۹۹۹ (۰/۰۲۲۱۲)	-۰/۴۱۹۶۱ (۰/۰۸۳۱۸)
	(۲، ۳)	-۰/۰۵۳۰۹ (۰/۰۳۸۱۵)	-۰/۱۲۳۱۹ (۰/۰۲۷۲۲)	-۰/۱۷۳۶۴ (۰/۱۲۳۷۹)
	(۲، ۴)	-۰/۰۱۰۷۹ (۰/۰۳۴۰۱)	-۰/۰۹۴۵۴ (۰/۰۲۴۷۵)	۰/۰۲۵۸۸ (۰/۱۱۲۲۴)
	(۰/۲، ۰/۵)	۰/۰۹۰۵۷ (۰/۰۳۴۷۹)	۰/۰۲۶۳۸ (۰/۰۳۱۱۵)	۰/۱۵۳۳۶ (۰/۰۸۵۳۲)
	(۰/۱، ۰/۳)	۰/۱۲۵۹۴ (۰/۰۳۳۱۶)	۰/۰۶۶۲۶ (۰/۰۳۱۰۹)	۰/۲۳۰۱۲ (۰/۰۶۵۴۱)
	(۰/۲، ۰/۷)	۰/۱۵۲۳۴ (۰/۰۳۰۳۲)	۰/۰۸۱۶۲ (۰/۰۲۸۷۲)	۰/۲۷۵۳۵ (۰/۰۴۷۶۱)
	(۱، ۴)	۰/۱۲۹۵۲ (۰/۰۲۶۸۷)	۰/۰۲۶۸۱ (۰/۰۲۳۴۴)	۰/۳۰۶۶۹ (۰/۰۳۴۵۷)
	(۰/۲، ۰/۹)	۰/۱۹۱۳۴ (۰/۰۲۵۵۴)	۰/۱۱۸۲۱ (۰/۰۲۵۴۷)	۰/۳۲۴۰۷ (۰/۰۲۵۱۵)
	(۰/۴، ۲)	۰/۱۹۸۷۹ (۰/۰۲۳۹۳)	۰/۱۱۱۵۲ (۰/۰۲۳۷۹)	۰/۳۳۸۰۴(۰/۰۱۹۲۱)

نتایج شبیه‌سازی ارائه شده در جدول‌های ۱ و ۲، درباره برآوردهای بیز سلسله مراتبی، E-بیز و بیز R به‌صورت زیر است:

الف) در حالت $1<n/m$، وقتی‌که $1/5<b_1/b_2$ باشد، کارایی برآورد E-بیز از کارایی برآوردهای بیز و بیز سلسله مراتبی بهتر است، اما در حالت $1/5\geq b_1/b_2$، کارایی برآورد بیز سلسله مراتبی از کارایی برآوردهای E-بیز و بیز بهتر می‌باشد.

ب) اگر $1/5>n/m\geq 1$ باشد، آنگاه در حالت‌های $0/5>b_1/b_2$ و $3\leq b_1/b_2$، برآورد بیز سلسله مراتبی از سایر برآوردها بهتر می‌باشد، اما در حالت $3>\frac{b_1}{b_2}\geq 0/5$، برآورد E-بیز از سایر برآوردها بهتر می‌باشد.

ج) اگر $2>n/m\geq 1/5$ باشد، آنگاه در حالت $3>b_1/b_2$، برآورد E-بیز از سایر برآوردها بهتر می‌باشد، اما در حالت $3\leq b_1/b_2$، برآورد بیز سلسله مراتبی از برآوردهای E-بیز و بیز، بهتر می‌باشد.

د) وقتی‌که $2\leq\frac{n}{m}$ می‌باشد، آنگاه در حالت‌های $1>b_1/b_2$ و $4/5\leq b_1/b_2$، برآورد بیز سلسله مراتبی از سایر برآوردها، بهتر می‌باشد، اما در حالت $4/5>b_1/b_2\geq 1$، برآورد E-بیز از سایر برآوردگرها بهتر می‌باشد.

و) به‌طورکلی هرچقدر نسبت b_1/b_2 در بازه $[2/5,\infty)$ بزرگ‌تر شود، آنگاه میانگین مربع خطای همه برآوردگرها کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش مقدار b_1/b_2 در بازه $[4/5,\infty)$، برآورد بیز سلسله مراتبی از برآوردهای E-بیز و بیز در هر حالت، کاراتر می‌شود. همچنین همواره برآوردگرهای پیشنهادی از برآورد بیز کاراترند.

۴-۲- داده‌های واقعی

در این زیر بخش از دو مجموعه داده‌های واقعی، برای تحلیل برآوردهای R که در بخش سوم به دست آورده شده است، استفاده می‌شود. این داده‌ها که از لاولس [۲۱] گرفته‌شده است، بیان‌کننده زمان‌های شکست ۲۰ نمونه فولادی می‌باشد که تحت فشار بار الکتریکی، ۱۴ نوع میدان الکتریکی قرارگرفته است. در این مقاله از داده‌های مربوط به فشار بارهای الکتریکی ۳۵ کولنی (مجموعه داده‌های اول) و ۳۵/۵ کولنی (مجموعه داده‌های دوم) استفاده شده که در جدول ۳ آورده شده است. اصغرزاده و همکاران [۲۲] از این مجموعه داده‌ها استفاده کردند. برآورد

ماکسیمم درستنمایی پارامتر توزیع نمایی و مقدار عددی آماره آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف به همراه p-مقدار مربوطه‌اش برای دو مجموعه داده‌های در نظر گرفته‌شده در جدول۴ آورده شده است. نتایج بیان‌کننده آن است که توزیع نمایی به‌خوبی به این دو مجموعه داده‌ها برازش می‌شود. در این بخش، برای مقایسه برآوردهای بیز، E-بیز و بیز سلسله مراتبی R از تابع چگالی پسین آن استفاده می‌شود. بنابراین با توجه به رابطه (۸)، توزیع‌های پسین θ_1 و θ_2 به ترتیب $Gamma(n+1,\sum_{i=1}^{n} X_i)$ و $Gamma(m+1,\sum_{j=1}^{m} y_j)$ می‌شوند، درنتیجه، توزیع پسین R به‌صورت زیر به دست آورده می‌شود.

$$f_R(r)=C\Gamma(n+m+2)\frac{r^m(1-r)^n}{[C_1(1-r)+C_2 r]^{n+m+2}},\quad 0<r<1$$

که C_1، C_2 و C قبلاً در بخش ۲ داده‌شده‌اند.

جدول (۳): مجموعه داده‌های اول و دوم

مجموعه داده‌های اول	۲۳۰	۱۶۹	۱۷۸	۲۷۱	۱۲۹	۵۶۸	۱۱۵	۲۸۰	۳۰۵	۲۶۳
	۱۱۰۱	۲۸۵	۷۲۴	۱۷۷	۴۹۳	۲۱۸	۳۴۲	۴۳۱	۱۴۳	۲۸۱
مجموعه داده‌های دوم	۱۵۶	۱۷۳	۱۲۵	۸۵۲	۵۵۹	۴۴۲	۱۶۸	۲۸۶	۲۶۱	۲۲۷
	۲۸۵	۲۵۳	۱۶۶	۱۳۳	۳۰۹	۲۴۷	۱۱۲	۲۰۲	۳۶۵	۷۰۲

با در نظر گرفتن n و m به ترتیب به‌عنوان تعداد داده‌های مجموعه داده‌های اول و دوم، فرض می‌کنیم $c_1=2$، $c_2=1$ باشد. به‌طورکلی برای تعیین c_1 و c_2 از روش مشخصی استفاده نمی‌شود، بلکه مانند برخی از نویسندگان مانند هان [۱۳-۱۴]، جاهین و اکاشا [۱۵] و یوسف‌زاده [۱۷] مقدار یا مقادیری برای ثابت c_i ها در نظر گرفته می‌شود. برای اطلاعات بیشتر درباره ثابت c_i ها به‌ویژه به هان [۱۳] و جاهین و اکاشا [۱۵] مراجعه شود. چون باید $0<b_1<c_1$ و $0<b_2<c_2$ باشند، سه مقدار $(0/4,0/1)$، $(1,5/1)$ و $(4/0.,2)$ برای (b_1,b_2) در نظر گرفته می‌شود. سپس به کمک مجموعه داده‌های اول و دوم، مقادیر برآوردهای بیز، E-بیز و بیز سلسله مراتبی R، مقدار اریبی برآوردگرها و میانگین مربع خطای آن‌ها دست آورده می‌شود که نتایج در جدول ۵ آورده شده است.

جدول (۴):.برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر توزیع نمایی و آماره آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف با p-مقدار مربوطه برای مجموعه‌های اول و دوم

مجموعه داده‌ها	آورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر	آماره آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف	p-مقدار
اول	۰/۴۰۷۹۴۱	۰/۱۳۶۶	۰/۷۶۵
دوم	۰/۳۲۶۸۷۲	۰/۰۷۴۵	۰/۹۲۱

در این زیر بخش، می‌دانیم $\frac{n}{m}=۱$. با توجه به جدول ۵، نتیجه می‌گیریم وقتی‌که $(b_۱,b_۲)=(۰/۱,۰/۴)$ می‌باشد، برآورد بیز سلسله مراتبی و در حالت‌های $(b_۱,b_۲)=(۱/۵,۱)$ و $(b_۱,b_۲)=(۲,./۴)$ به ترتیب برآوردهای E-بیز و برآورد بیز سلسله مراتبی از سایر برآوردها بهتر است که منطبق با نتایج شبیه‌سازی در قسمت (ب) است.

جدول (۵): مقادیر برآورد R، مقدار اریبی و میانگین مربع خطای آن‌ها برای مجموعه داده‌های اول و دوم

$(b_۱,b_۲)$	روش برآورد	برآورد R	اریبی	میانگین مربع خط
(۰/۱ ،۰/۴)	برآورد E-بیز	۰/۴۶۶۹۴۸۳	-۰/۰۰۱۸۴۹۴	۰/۰۰۱۷۴۶۱
	برآورد بیز سلسله مراتبی	۰/۵۹۷۵۵۳۳	-۰/۰۰۱۴۲۰۷	۰/۰۰۰۰۰۴۱
	برآورد بیز	۰/۴۷۰۷۰۸۱	-۰/۰۰۱۸۶۴۳	۰/۰۰۱۷۷۴۳
(۱، ۱/۵)	برآورد E-بیز	۰/۴۷۰۶۸۵۱	-۰/۰۰۱۸۶۴۲	۰/۰۰۰۰۰۴۹
	برآورد بیز سلسله مراتبی	۰/۳۸۵۴۵۶۸	-۰/۰۰۱۵۱۱۶	۰/۰۰۱۱۷۸۹
	برآورد بیز	۰/۴۶۶۹۲۲۵	-۰/۰۰۱۸۴۹۳	۰/۰۰۰۰۰۵۱
(۲ ،۰/۴)	برآورد E-بیز	۰/۴۶۶۸۷۹۵	-۰/۰۰۱۸۴۹۱	۰/۰۰۰۰۰۵۰۱۹
	برآورد بیزی سلسله مراتبی	۰/۳۹۱۱۸۰۶	-۰/۰۰۰۱۲۹۳	۰/۰۰۰۰۰۰۰۷۸
	برآورد بیز	۰/۴۷۰۶۴۷۱	-۰/۰۰۱۸۶۴۱	۰/۰۰۰۰۰۵۰۷۵

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، وقتی‌که X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع‌های نمایی با پارامترهای به ترتیب $\theta_۱$ و $\theta_۲$ می‌باشند، برآوردهای E-بیز و بیز سلسله مراتبی $R=P(X>Y)$، تحت تابع زیان مربع خطا به دست آورده شد. سپس به کمک روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و دو مجموعه داده‌های واقعی، این برآوردگرها باهم و با برآورد بیز R مقایسه شدند و نتیجه گرفته شد که

برآوردهای بیز سلسله مراتبی و E-بیز، همواره کاراتر از برآورد بیز هستند، اما کارایی برآوردگرهای پیشنهادی به نسبت ابرپارامترهای توزیع پیشین بستگی دارد.

تشکر و قدردانی

نویسنده مقاله نهایت تشکر را از سردبیر و داوران محترم مجله در ارزیابی و پیشنهادهای ارزشمندشان برای بهتر شدن مقاله دارد.

منابع

[1] Awad, A. M., Azzam, M. M. and Hamdan, A. M. (1981). Some inference results on P(X>Y) in the bivariate exponential model, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **10**, 2515-2525.

[2] Gupta, R. D. and Gupta, R. C. (1990). Estimation of $P(a'X > b'Y)$ in the Multivariate normal case, *Statistics*, **1**, 91-97.

[3] Raqab, M. Z. and Kundu, D. (2005). Coparsion of different estimators P(X>Y) for a scaled Burr type XII distribution, *Communication in Statistics-Simulation and Computation*, **34**(2), 465-483.

[4] Kundu, D. and Gupta, R. D. (2005). Estimation of P(X>Y) for the generalized exponential distribution, *Metrika*, **61**, 291-308.

[5] Raqab, M. Z., Madi, T. and Kundu, D. (2008). Estimation of P(X>Y) for exponential distribution under progressive type-II censoring, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **85**(2), 2854-2865.

[6] Baklizi, A. (2008). Liklihood and Bayesian estimation of P(X>Y) using lower record values from the generalized exponential distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 3468-3473.

[7] Asgharzadeh, A., Valiollahi, R. and Raqab, M. Z. (2011). Stress-strength reliability of Weibull distribution based on progressively censord samples, *SORT*, **35**(2), 103-124.

[8] Lio, Y. L. and Tsai, T. R. (2012). Estimation of $\delta = p(X > Y)$ for Burr XII distribution based on the progressivey first failure-censord samples, *Journal of Applied Statistics*, **39**(2), 465-483.

[9] Al-Mutairi, D. K., Gitany, M. E. and Kundu, D. (2013). Inferences on Stress-strength reliability from Lindley distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **42**(8), 1443-1463.

[10] Ghitany, M. E., Al-Mutairi, D. K. and Aboukhamseen, S. M. (2015). Estimation of the reliability of a Stress-strength system from power indley distributions, *Communications Statistics Simulation and Computation*, **44**, 118-136.

[11] Lindley, D.V. and Smith, A.F. (1972), Bayes estimation for the linear model, *Journal of the Royal Statistical Society-Series B*, **34**, 1–41..

[12] Han, M. (1997), The structure of hierarchical prior distribution and its applications, *Chinese Operations Research and Management Science*, **6** (3), 31–40.

[13] Han, M. (2009), E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate, *Applied Mathematical Modelling*, **33**(4), 1915-1922.

[14] Han, M. (2011), E-Bayesian estimation of the reliability derived from Binomial distribution, *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 2419-2424.

[15] Jaheen, Z. F. and Okasha, H. M. (2011). E-Bayesian estimation for the Burr type XII model based on type-2 censoring, *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 4730–4737.

[16] Wang, J., Li, D. and Chen, D. (2012). E Bayesian Estimation and Hierarchical Bayesian Estimation of the System Reliability Parameter, *Systems Engineering Procedia*, **3**, 282 – 289.

[17] Yousefzadeh, F. (2017). E-Bayesian and Hierarchical Bayesian estimations for the System reliability parameter based on asymmetric loss function, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **46** (1), 1-8.

[18] Berger, J. O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, second ed., Springer-Verlag, New York.

[19] Bateman, H. (1953). *Higer Transcendental Functions*, Vol. II. Hograw-Hill, New York.

[20] Han, M. (2017). E-Bayesian and Hierarchical Bayesian estimations for the System reliability parameter, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **46** (4), 1606-1620.

[21] Lawless, J. F. (2003). *Statistical models and methods for lifetime data*, 2nd edition, Hoboken, John Wiley and Sons.

[22] Asgharzadeh, A., Valiollahi, R. and M. Z. Raqab. (2017). Estimation of Pr$(Y < X)$ for the two-parameter generalized exponential records, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **46** (1), 379-394.

Estimate R=P(X>Y) in Exponential Ddistribution, Based on E-Bayesian and Hierarchical Bayesian Methods

Shahram yagoubzade Shahrestani

Department of Statistics, Payame Noor University, Soomehsara, Iran

Abstract

Sometimes the extent of the parameter domain changes over the space of the parameter, increases the risk of posterior Bayesian. In this case, the empirical and hierarchical estimates can be a good substitute for Bayesian estimation. In this study, when X and Y are two independent exponential distributions with different parameters, were estimated the E-Bayesian and hierarchical Bayesian for the under squared error loss function. This suggested methods, was compared with each other and with the Bayesian estimator using the Monte Carlo simulation and two set data.

Keywords: E-Bayesian Estimation, Hierarchical Bayesian Estimation, Exponential Distribution, Squared Error Loss Function, Reliability.

Mathematics Subject Classification (2010): 62C10, 62F12.