

دینامیک برخورد سه جسمی در تقریب مرتبه اول برهم‌کنش توسط تابع موج کولنی در کانال تهییج

احسان درانی، رضا فتحی*

دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده

یکی از مشکلاتی که در تقریب مرتبه اول مربوط به برهم‌کنش‌های الکترونی و هسته‌ای در کانال تهییج و انرژی‌های میانی و بالای برخورد وجود دارد این است که با در نظر گرفتن موج تخت به‌عنوان تابع موج پرتابه، سهم جمله مرتبه اول هسته‌ای در محاسبه سطح مقطع جزئی و کل به‌دلیل تعامل توابع موج حالت‌های اولیه و نهایی زیر سیستم مقید ظاهر نمی‌گردد. بدین منظور و برای حل این مشکل بنا داریم از تابع موج کولنی به‌عنوان موج واپیچیده در محاسبات استفاده نماییم. لذا برآن شدیم که دینامیک برخورد سه جسمی را با این تابع موج بررسی کنیم. مطالعه انجام شده نشان می‌دهد که نحوه انتقال اندازه حرکت از پرتابه به هدف به سادگی محاسبات انجام شده توسط موج تخت نبوده و تابع وزنی $\Omega(k', k, K_i, K_f)$ نحوه توزیع و انتقال اندازه حرکت را بیان کرده و سطح مقطع جزئی و کل را تحت تأثیر قرار خواهد داد. به‌دلیل نبودن نتایج تجربی در محدوده انرژی مورد بحث، نتایج کارمان با نتایج تئوری در دسترس مقایسه شده است.

کلیدواژگان: برخورد سه جسمی، سطح مقطع جزئی برخورد، تابع موج کولنی، کانال تهییج

مقدمه

جدید انرژی، طراحی شتاب‌دهنده‌های نسل جدید، کنترل فرآیندهای گداخت، طراحی لیزرهای پر قدرت، شبیه‌سازی محیط پلاسمایی و محیط‌های بین ستاره‌ای و از بین بردن سلول‌های سرطانی توسط برخورد با یون‌های پرانرژی نیاز به دانستن اطلاعات دقیق مربوط به سطح مقطع برخورد این فرآیندها را روشن می‌سازد [۳-۵].

بررسی و مقایسه نتایج به‌دست آمده از جدیدترین نتایج آزمایشگاهی با کارهای تئوری نشان می‌دهد که حتی در بهترین وضعیت ممکن، تفاوت قابل ملاحظه‌ای بین این نتایج وجود دارد و این امر نشان می‌دهد

برخورد یون‌های پرانرژی با اتم به مدت چندین دهه است که نظر فیزیک‌دانان را به خود جلب کرده است. در این میان برخوردهای سه و چهار جسمی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشند [۱، ۲]. چون به نظر می‌رسد که تاکنون تمام جنبه‌های مربوط به مسئله برخوردهای سه و چهار جسمی مورد بررسی قرار نگرفته، بنابراین می‌تواند به‌عنوان یک مسئله تئوری که با جزئیات کامل حل نشده جای بحث را دارا باشد. از طرفی نتایج مربوط به سطح مقطع برخورد یون‌های پرانرژی با اتم و مولکول‌های متفاوت دارای کاربردهای فراوانی در شاخه‌های مختلف فیزیک می‌باشد. جستجو برای منابع

*نویسنده مسئول: rfathi@uk.ac.ir

در برخورد یون با اتم و در انرژی‌های بالا می‌توان از تقریب‌های بورن^۱ [۶] برای محاسبه سطح مقطع بهره گرفت. در این انرژی‌ها تقریب مرتبه اول بورن جواب‌های نسبتاً دقیقی را در اختیار ما قرار می‌دهد. نشان داده شده است که در نظر گرفتن پتانسیل برهم‌کنش پرتابه-هسته که به صورت کولنی در نظر گرفته می‌شود در کانال تهییج برای به دست آوردن سطح مقطع و با در نظر گرفتن موج تخت به عنوان تابع موج پرتابه به دلیل تعامد توابع موج هیدروژن در حالت اولیه و نهایی با شکست روبرو شده و بنابراین اطلاعات مربوط به دینامیک زوایای بزرگ پراکندگی که مربوط به این برهم‌کنش می‌باشد از دست خواهد رفت. برای برطرف نمودن این مشکل از روش‌های اختلالی تعمیم یافته که به روش سه جسمی فادیف^۲ معروف است استفاده می‌شود [۷]. در این روش عملگر گذار به جای پتانسیل برهم‌کنش وارد مسئله می‌گردد هرچند به دلیل ماهیت بلندبرد بودن پتانسیل برهم‌کنش کولنی محاسبه عملگر گذار با مشکل مواجه شده و بنابراین به‌کارگیری این روش نیز خالی از اشکال نخواهد بود. در این ناحیه همچنین می‌توان از روش‌های کلاسیکی مانند مسیرهای کلاسیکی مونت-کارلو^۳ [۸] استفاده کرد. اضافه کردن جمله برهم‌کنشی پرتابه-هسته در این روش مسیر حرکت پرتابه را مختل خواهد نمود.

از جمله کارهای اولیه انجام شده در خصوص برخورد یون با اتم هیدروژن، به‌کارگیری تقریب مرتبه اول بورن است که در سال ۱۹۵۳ توسط بیت و گریفینگ [۹] انجام پذیرفت. جکسون و شیف [۱۰] پیشنهاد دادند که سهم برهم‌کنش هسته‌ای نیز در تقریب مرتبه اول بورن گنجانده شود. این پیشنهاد در برخورد

که هنوز جزئیاتی در تئوری وجود دارد که به آن پرداخته نشده است. بنابراین بررسی دقیق این مسئله با در نظر گرفتن جنبه‌های مختلف برخورد برای ارائه مدل دقیق برای توصیف کانال‌های مختلف برخورد ضروری به نظر می‌رسد.

چون قرار است در مورد یک مسئله سه جسمی بحث شود لذا جنبه‌های مختلف این برخورد را مورد بررسی قرار خواهیم داد. در یک برخورد سه جسمی می‌توان سیستم را تحت عنوان یک پرتابه که اغلب یون برهنه به صورت P^{Z_B+} و یک هدف با یک الکترون فعال به شکل $(T^{Z_A+} + e^-)$ است معرفی نمود. فرآیندهای برخورد مربوط به این سیستم سه ذره‌ای به صورت:

$$\begin{aligned} P^{Z_B+} + (T^{Z_A+} + e^-) &\rightarrow P^{Z_B+} + (T^{Z_A+} + e^-) & ۱ \\ P^{Z_B+} + (T^{Z_A+} + e^-) &\rightarrow P^{Z_B+} + (T^{Z_A+} + e^-)^* & ۲ \\ P^{Z_B+} + (T^{Z_A+} + e^-) &\rightarrow (P^{Z_B+} + e^-) + T^{Z_A+} & ۳ \\ P^{Z_B+} + (T^{Z_A+} + e^-) &\rightarrow P^{Z_B+} + T^{Z_A+} + e^- & ۴ \end{aligned}$$

نشان داده می‌شود. فرآیند شماره ۱ برخورد الاستیک و فرآیندهای شماره ۲، ۳ و ۴ برخوردهای غیر الاستیک و به ترتیب تهییج مستقیم، انتقال بار الکتریکی و یونش نامیده می‌شوند. از بین برخوردهای سه جسمی برخورد یون با اتم هیدروژن از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. دلیل این امر این است که ما با یک سیستم سه ذره‌ای واقعی روبرو هستیم که توابع موج و انرژی ترازهای مختلف آن مشخص است و بنابراین اطلاعات مناسبی از دقت مدل استفاده شده در بررسی دینامیک برخورد سه جسمی را در اختیار ما قرار می‌دهد. اگر قرار باشد که همین بحث در مورد اتم هلیوم مطرح گردد باید از دینامیک برخورد چهار جسمی و یا فرمول‌بندی سه جسمی با در نظر گرفتن مدل الکترون فعال استفاده شود که در کار حاضر موضوعیت ندارد.

³Classical trajectory Monte Carlo method

¹Born approximation

²Faddeev

که در آن A^{q+} یون پرتابه به جرم M_p و $(H^+ + e)$ هدفی با یک پروتون و یک الکترون به ترتیب با جرم‌های M_T و m ($m=1$) می‌باشد. در دستگاه مختصات مرکز جرم دستگاه سه ذره‌ای [۱۳]، سطح مقطع دیفرانسیلی در گذار از حالت اولیه i به حالت نهایی f با رابطه:

$$\left(\frac{d\sigma_{i \rightarrow f}}{d\Omega} \right)_{C.M.} = \frac{v_i v_f K_f}{4\pi^2 K_i} |A_{i \rightarrow f}|^2 \quad 6$$

به دامنه پراکندگی A مرتبط می‌شود. در این رابطه v_i و v_f به ترتیب جرم‌های کاهش یافته در کانال ورودی و خروجی و \mathbf{K}_i و \mathbf{K}_f بردارهای اندازه حرکت اولیه و نهایی نسبی پرتابه در دستگاه مختصات مرکز جرم سیستم سه ذره‌ای می‌باشند. در کانال تهییج جرم‌های کاهش یافته v_i و v_f با هم برابر هستند و به صورت $\left(v_i = \frac{M_p(m + M_T)}{m + M_p + M_T} \right)$ تعریف می‌شوند. اگر انرژی‌های قیدی اولیه و نهایی زیرسیستم مقید به ترتیب با ε_i و ε_f نشان داده شوند، می‌توان انرژی کل سیستم در کانال تهییج را به شکل:

$$E = \frac{1}{2v_i} K_i^2 + \varepsilon_i = \frac{1}{2v_f} K_f^2 + \varepsilon_f \quad 7$$

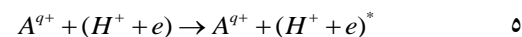
نوشت که در آن $\mathbf{K}_f = v_f \mathbf{v}_f$ و $\mathbf{K}_i = v_i \mathbf{v}_i$ بوده و \mathbf{v}_f و \mathbf{v}_i به ترتیب سرعت اولیه و نهایی پرتابه نسبت به مرکز جرم زیر سیستم مقید می‌باشند. اگر T_{xy} عملگر گذار دو جسمی مربوط به اندرکنش دو جسم x و y بوده و پتانسیل برهم‌کنش این دو ذره با V_{xy} نمایش داده شود، عملگر گذار دو جسمی به صورت:

$$T_{xy} = V_{xy} + V_{xy} G_0^+ T_{xy} \quad 8$$

پروتون با اتم هیدروژن و در کانال انتقال بار منجر به نتایج قابل قبولی گردید و به دلیل فاز مخربی که بین دامنه‌های مرتبه اول الکترونی و هسته‌ای وجود داشت باعث کاهش سطح مقطع کل شد، در حالی که بدون در نظر گرفتن این جمله سطح مقطع کل بزرگ‌تر از نتایج آزمایشگاهی به دست می‌آمد. روش دیگری که در محاسبات سطح مقطع و در کانال تهییج از آن بهره گرفته می‌شود استفاده از تابع موج واپیچیده به عنوان تابع موج پرتابه و یا استفاده از تابع موج کولنی^۴ [۱۱] است. به دلیل جنبه‌های مخرب بلندبرد بودن پتانسیل کولنی در فیزیک اتمی و در مسائل برخورد از شرایط مرزی تصحیح شده روی تابع موج استفاده شده و آن را تحت عنوان نظریه موج واپیچیده پیوسته^۵ [۱۲] می‌شناسیم. در کار حاضر یک مسئله برخورد سه جسمی را در تقریب مرتبه اول و با در نظر گرفتن تابع موج کولنی به عنوان تابع موج پرتابه در فضای اندازه حرکت مورد بررسی قرار داده و در این خصوص که انتقال اندازه حرکت از پرتابه به هدف با این تابع موج چگونه تغییر کرده و این امر سطح مقطع برخورد را به چه شکلی تحت تأثیر قرار خواهد داد بحث خواهیم نمود. این یکی از آن جنبه‌هایی است که در مسائل برخورد به آن کم‌تر پرداخته شده ولی از طرفی به نظر می‌رسد که در بررسی دینامیک برخورد سه جسمی بسیار ضروری می‌باشد. لازم به ذکر است یادآور شویم در فرمول‌بندی‌های حاضر از یکای اتمی استفاده شده و تمامی برهم‌کنش‌ها به صورت کولنی خواهد بود.

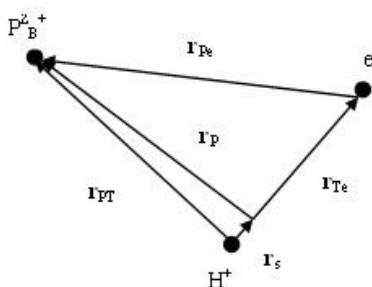
بخش نظری

در یک برخورد سه جسمی مانند برخورد یک یون برهنه با اتم هیدروژن و در کانال تهییج داریم:



⁵Continuum distorted wave

⁴Coulomb waves



شکل ۱. بردارهای توصیف کننده دستگاه سه جسمی.

با توجه به شکل ۱ مجموعه مختصات $(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_{Te})$ توصیف کننده سیستم بوده و هامیلتونی کل سیستم سه ذره‌ای در دستگاه مختصات مرکز جرم را می‌توان به شکل:

$$H = -\frac{1}{2V_i} \nabla_{r_p}^2 - \frac{1}{2\mu_i} \nabla_{r_e}^2 + V \quad 14$$

نوشت به طوری که:

$$V = V_{Pe} + V_{Te} + V_{PT} = -\frac{1}{r_{Pe}} - \frac{1}{r_{Te}} + \frac{1}{r_{PT}} \quad 15$$

می‌باشد. در هامیلتونی ذکر شده V_i و μ_i جرم‌های کاهش یافته بوده $(\mu_i = mM_p / (m + M_p))$ و با تقریب خوبی $\mathbf{r}_{PT} \approx \mathbf{r}_p$ می‌باشد.

اگر هامیلتونی کل به دو قسمت H_i و V_i شکسته شود به روش جداسازی متغیرها می‌توان به راحتی توابع موج مربوط به هامیلتونی H_i را به دست آورده و از V_i به عنوان پتانسیل اختلالی استفاده نمود. هدف از انجام این کار این است که حل دقیق توابع موج مربوط به هامیلتونی کل امکان‌پذیر نیست. برای بازچینی هامیلتونی ابتدا به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$H_i = -\frac{1}{2V_i} \nabla_{r_p}^2 - \frac{1}{2\mu_i} \nabla_{r_e}^2 + V_{Te} \quad 16$$

و

$$V_i = V_{Pe} + V_{PT} = -\frac{1}{r_{Pe}} + \frac{1}{r_{PT}} \quad 17$$

جواب‌های هامیلتونی H_i به صورت حاصل ضرب توابع موج اتم هیدروژن برای زیر سیستم مقید و تابع موج تخت به عنوان تابع موج پرتابه ظاهر خواهند شد.

تعریف می‌شود [۱۳]. در رابطه $G_0^+ = (E - H_0)^{-1}$ عملگر گرین انتشار آزاد کل سیستم سه ذره‌ای است. برای محاسبه سطح مقطع دیفرانسیلی و کل در کانال تهییج باید دامنه‌های پراکندگی متناظر با این کانال را که با A نمایش داده شد با قرار دادن عناصر عملگر گذار این کانال، بین حالت‌های اولیه و نهایی سیستم به دست آورد.

در فرمول‌بندی حاضر دامنه‌های پراکندگی را از جمله اول عملگر گذار یعنی پتانسیل برهم‌کنش به دست خواهیم آورد و از دو جمله‌ای که شامل برهم‌کنش مستقیم پرتابه-الکترون و همچنین برهم‌کنش پرتابه-هسته می‌باشد استفاده خواهیم کرد، به طوری که می‌توان نوشت:

$$\tau_E = V_{Pe} + V_{PT} \quad 9$$

همان طور که گفته شد دامنه پراکندگی $(A_{i \rightarrow f})$ محاسبه عناصر عملگر گذار τ_E بین حالت‌های اولیه و نهایی به دست می‌آیند و می‌توان دامنه تهییج تا تقریب مرتبه اول را به صورت:

$$A_{i \rightarrow f} = \langle f | \tau_E | i \rangle = \langle f | V_{Pe} | i \rangle + \langle f | V_{PT} | i \rangle \quad 10$$

$$A_{i \rightarrow f} = A_e^i + A_n^i \quad 11$$

نمایش داد. جمله مرتبه اول دامنه پراکندگی برهم‌کنش مستقیم الکترون است و به صورت:

$$A_e^i = \langle f | V_{Pe} | i \rangle \quad 12$$

تعریف می‌گردد و جمله A_n^i که به دامنه پراکندگی برهم‌کنش مرتبه اول مستقیم بین هسته‌ای معروف است به شکل:

$$A_n^i = \langle f | V_{PT} | i \rangle \quad 13$$

مشخص می‌شود. برای نوشتن روابط فوق می‌بایست نکاتی در خصوص هامیلتونی مطرح شود.

می‌توان بازچینی هامیلتونی را به شکل دیگری نیز مطرح نمود که مد نظر مقاله حاضر است. اگر هامیلتونی کل به صورت زیر به H_i و V_i تقسیم شود مجدداً معادله دیفرانسیلی را به شکل جداسازی متغیرها می‌توان حل کرد. در این حالت پتانسیل $V' = \frac{1}{r_p}$ را به رابطه ۱۶ اضافه و از رابطه ۱۷ کم خواهیم کرد، به عبارتی خواهیم داشت:

$$V_i = V_{Pe} + V_{PT} - V' = -\frac{1}{r_{Pe}} + \frac{1}{r_{PT}} - \frac{1}{r_p} \quad ۲۳$$

و

$$H_i = -\frac{1}{2V_i} \nabla_{r_p}^2 - \frac{1}{2\mu_i} \nabla_{r_{Te}}^2 + V_{Te} + V' \quad ۲۴$$

تابع موج این هامیلتونی به صورت حاصل ضرب تابع موج اتم هیدروژن به عنوان تابع موج زیر سیستم مقید در تابع موج کولنی به عنوان موج واپیچیده پرتابه ظاهر خواهد شد. باید دقت نمود که عبارت $(\frac{1}{r_{PT}} - \frac{1}{r_p})$ از مرتبه نسبت جرم الکترون به جرم هسته است و می‌توان از آن‌ها صرف نظر کرد بنابراین تنها پتانسیل باقیمانده در محاسبه سطح مقطع پتانسیل V_{Pe} خواهد بود با این بازچینی تأثیر برهم‌کنش بین پرتابه و هسته در تابع موج ظاهر خواهد شد. توابع موج کولنی در کانال‌های اولیه و نهایی را می‌توان به شکل زیر نمایش داد [۱۵]:

۲۵

$$\psi_{\mathbf{K}_i}^{(+)}(\mathbf{r}_p) = N_{\mathbf{K}_i} e^{i\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{r}_p} {}_1F_1(-i\eta_i, 1; -i(K_i r_p - \mathbf{K}_i \cdot \mathbf{r}_p)) \quad ۲۶$$

$\psi_{\mathbf{K}_f}^{(-)}(\mathbf{r}_p) = N_{\mathbf{K}_f} e^{-i\mathbf{K}_f \cdot \mathbf{r}_p} {}_1F_1(-i\eta_f, 1; -i(K_f r_p - \mathbf{K}_f \cdot \mathbf{r}_p))$
 $N_{\mathbf{K}_i}$ و $N_{\mathbf{K}_f}$ ثابت‌های بهنجارش، η_i و η_f ضرایب زومرفلد در کانال اولیه و نهایی خواهند بود. برای محاسبه عبارت $\langle \mathbf{K}_f n_f | V_{Pe} | \mathbf{K}_i n_i \rangle$ با توابع موج کولنی می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$\psi_{\mathbf{K}_f}^{(-)}(\mathbf{r}) = \int d^3 k' \varphi_{\mathbf{K}_f}^{(-)}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \quad ۲۷$$

$$\psi_{\mathbf{K}_i}^{(+)}(\mathbf{r}) = \int d^3 k' \varphi_{\mathbf{K}_i}^{(+)}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \quad ۲۸$$

اگر تابع موج ذره آزاد به صورت $\langle \mathbf{k} | \mathbf{r} \rangle = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ بهنجار شده باشد این رابطه منجر به روابط بهنجارش و $\langle \mathbf{r} | \mathbf{r}' \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ و $\langle \mathbf{k} | \mathbf{k}' \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ خواهد شد.

مطابق رابطه ۶ برای محاسبه سطح مقطع دیفرانسیلی می‌بایست پتانسیل‌های اختلالی را بین حالت‌های اولیه و نهایی سیستم قرار داد که جمله مربوط به برهم‌کنش بین پرتابه-هسته مگر در حالت برخورد الاستیک که مورد نظر ما نمی‌باشد صفر شده و جمله برهم‌کنش پرتابه-الکترون که به شکل $\langle \mathbf{K}_f n_f | V_{Pe} | \mathbf{K}_i n_i \rangle$ ظاهر می‌گردد منجر به محاسبه عامل شکل خواهد شد. اگر پتانسیل مورد نظر را به شکل:

۱۸

$$V_{Pe} = -\frac{1}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_{Te}|} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\exp(-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_{Te}))}{q^2} d^3 q$$

بنویسیم در این صورت داریم:

۱۹

$$\langle \mathbf{K}_f n_f | V_{Pe} | \mathbf{K}_i n_i \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \left(\int d^3 q \frac{1}{q^2} \langle \mathbf{K}_f | e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_p} | \mathbf{K}_i \rangle \langle n_f | e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_{Te}} | n_i \rangle \right)$$

با توجه به تابع موج پرتابه می‌توان نوشت:

$$\langle \mathbf{K}_f | e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_p} | \mathbf{K}_i \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_f - \mathbf{q}) \quad ۲۰$$

و

$$\langle n_f | e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_{Te}} | n_i \rangle = f_{if}(\mathbf{q}) \quad ۲۱$$

کمیت $f_{if}(\mathbf{q})$ به عامل شکل معروف است و به شکل تحلیلی در مرجع [۱۴] محاسبه شده است. بنابراین داریم:

$$\langle \mathbf{K}_f n_f | V_{Pe} | \mathbf{K}_i n_i \rangle = 4\pi K^{-2} f_{if}(\mathbf{K}) \quad ۲۲$$

به طوری که $\mathbf{K} = \mathbf{K}_i - \mathbf{K}_f$ تغییر اندازه حرکت پرتابه در طول فرآیند پراکندگی است.

تخت وجود نداشته و این پیچیدگی از تأثیر برهم کنش هسته‌ای ناشی می‌شود.

مقایسه روابط ۲۲ و ۳۱ نشان‌دهنده این مطلب است که اگر تابع وزنی به صورت حاصل ضرب دو توزیع دلتای دیراک به شکل

$$\Omega(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{K}_i, \mathbf{K}_f) = \delta(\mathbf{K}_i - \mathbf{k}) \delta(\mathbf{K}_f - \mathbf{k}')$$

در نظر گرفته شود به روابط موج تخت منجر خواهد شد ولی نکته این است که این تابع وزنی مانند دلتای دیراک عمل نکرده و اعتقاد داریم که در نظر گرفتن موج کولنی در محاسبات، شکل تابع توزیع اندازه حرکت را تغییر داده و تابع توزیع جدیدی را وارد مسئله خواهد نمود. اگر به تبدیل فوری تابع موج کولنی در فضای اندازه حرکت دقت شود به یکی از شکل‌های تابع دلتای دیراک بسیار نزدیک بوده و حدس ما این است که بیشترین سهم سطح مقطع دیفرانسیلی و کل مربوط به این شکل از تابع وزنی باشد. بررسی دقیق‌تر مسئله نیاز به کار محاسباتی پیچیده‌ای دارد که عملکرد این تابع وزنی را مشخص نماید.

همچنین داشتن نتایج تجربی با دقت بالا می‌تواند برای مقایسه نتایج و روشن نمودن جنبه‌های مختلف این تابع وزنی کارساز باشد که در محدوده انرژی مورد بحث وجود ندارد. سعی ما بر این است که در مقاله دیگری رابطه ۳۱ را با جزئیات در فضای موقعیت مورد بررسی قرار دهیم. در کار حاضر دو قسمت از رابطه ۳۱ در فضای موقعیت که فرم تابع دلتای دیراک دارند مورد بررسی قرار گرفته و نتایج با این دو قسمت ارائه شده است. این امر تأیید کننده همان صحبت قبلی است که در تابع وزنی به دست آمده رابطه ۳۱ شکل تابع دلتای دیراک نیز وجود خواهد داشت. محاسبات عددی دقیقتری در خصوص محاسبه سطح مقطع جزئی و کل در مقاله دیگری با جزئیات ارائه خواهد شد. در محاسبات عددی سعی نمودیم که

به طوری که $\varphi_{\mathbf{K}_f}^{(-)}(\mathbf{k}')$ و $\varphi_{\mathbf{K}_i}^{(+)}(\mathbf{k})$ به ترتیب تبدیل فوری توابع موج کولنی در کانال اولیه و نهایی می‌باشند. در این صورت خواهیم داشت:

$$\langle \mathbf{K}_f | e^{-iq.r} | \mathbf{K}_i \rangle = \int d^3r \psi_{\mathbf{K}_f}^{(-)*}(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{K}_i}^{(+)}(\mathbf{r}) e^{-iq.r} \quad 29$$

$$= \int d^3r \int d^3k \varphi_{\mathbf{K}_i}^{(+)}(\mathbf{k}) \int d^3k' \varphi_{\mathbf{K}_f}^{(-)*}(\mathbf{k}') e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}'-\mathbf{q}).r}$$

اگر ابتدا نسبت به متغیر r انتگرال گرفته شود داریم:

$$\langle \mathbf{K}_f | e^{-iq.r} | \mathbf{K}_i \rangle = (2\pi)^3 \int d^3k \int d^3k' \varphi_{\mathbf{K}_f}^{(-)*}(\mathbf{k}') \varphi_{\mathbf{K}_i}^{(+)}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'-\mathbf{q})$$

با استفاده از تعریف عامل شکل و استفاده از رابطه ۲۱ می‌توان نوشت:

$$\langle \mathbf{K}_f n_f | V_{Pe} | \mathbf{K}_i n_i \rangle = 4\pi K^{-2} \int d^3k \int d^3k' \Omega(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{K}_i, \mathbf{K}_f) f_{if}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \quad 31$$

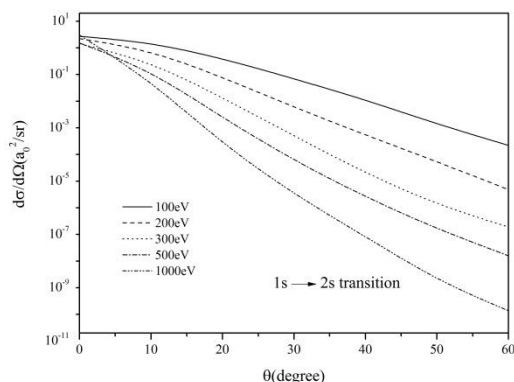
دقت شود که در رابطه بالا روی متغیر \mathbf{q} انتگرال گرفته شده است. تابع وزنی ظاهر شده در عبارت ۳۱ به صورت:

$$\Omega(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{K}_i, \mathbf{K}_f) = |\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_f|^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^{-2} \varphi_{\mathbf{K}_f}^{(-)*}(\mathbf{k}') \varphi_{\mathbf{K}_i}^{(+)}(\mathbf{k}) \quad 32$$

تعریف خواهد شد. می‌توان رابطه ۳۱ را با رابطه ۲۲ که توسط موج تخت به دست آمد مقایسه کرده و در مورد آن بحث نمود. معرفی بیشتر روابط مربوط به تابع وزنی در ضمیمه انجام شده است.

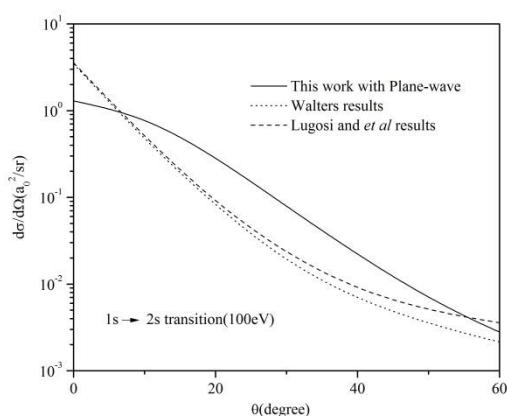
بحث و نتیجه گیری

همان‌طور که نشان داده شد محاسبه سطح مقطع دیفرانسیلی و کل به دو عامل بستگی دارد. عامل اول وابسته به ذره فرودی و پراکنده شده و تغییر اندازه حرکت آن است و عامل دوم عامل شکل نام دارد که از مشخصات هدف می‌باشد. تابع وزنی به دست آمده در روابط ذکر شده یک نوع پیچیدگی در تغییر اندازه حرکت پرتابه را نشان می‌دهد که در محاسبات با موج



شکل ۲. مقایسه سطح مقطع‌های دیفرانسیلی محاسبه شده در کار حاضر (دو قسمت از موج کولنی) در برخورد پوزیترون با اتم هیدروژن در انرژی‌های ۱۰۰، ۲۰۰، ۳۰۰، ۵۰۰ و ۱۰۰۰ الکترون ولت و در گذار از حالت پایه به اولین حالت برانگیخته.

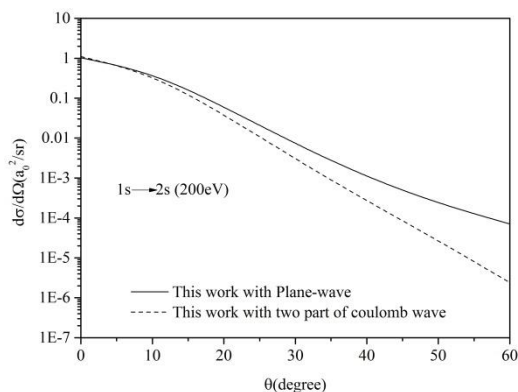
با توجه به نتایج کاری که در برخورد پوزیترون با اتم هیدروژن و با تقریب موج تخت انجام شده در انرژی‌های میانی 100eV و 200eV سطح مقطع کل محاسبه شده بزرگ‌تر از دو نتیجه نظری مراجع [۱۶] و [۱۷] است که دلیل آن را به راحتی می‌توان در شکل-های ۳ و ۴ مشاهده کرد. در زوایایی که بیشترین تأثیر را روی سطح مقطع کل دارند نتایج سطح مقطع دیفرانسیلی نتایج موج تخت بالاتر از دو نتیجه تئوری دیگر قرار گرفته است.



شکل ۳. مقایسه سطح مقطع دیفرانسیلی محاسبه شده در کار حاضر با در نظر گرفتن موج تخت در برخورد پوزیترون با اتم هیدروژن در انرژی ۱۰۰ الکترون ولت و در گذار از حالت پایه

برخورد پوزیترون با اتم هیدروژن را به چند دلیل در نظر بگیریم. اول این‌که چون پوزیترون جرمی برابر با جرم الکترون ولی باری با علامت مخالف آن دارد لذا این ذره را دارای خواص یکتایی نموده و این‌که برخورد این یون با اتم، مفاهیم برهم‌کنش ماده و ضد ماده را در بر می‌گیرد می‌تواند به‌عنوان آزمونی از دقت تئوری به‌کار گرفته شده در مقایسه با سایر تئوری‌ها باشد. از طرفی در برخورد این یون با اتم هیدروژن ممکن است پوزیترونیم در کانال انتقال بار تشکیل گردد یا نابودی دو ذره (الکترون و پوزیترون) را به‌همراه داشته باشد که در برخورد الکترون با اتم هیدروژن قابل مشاهده نیست. همچنین اثر تبدیلی^۶ الکترون-الکترون در این برخورد وجود نداشته و به نظر می‌رسد که این امر بررسی مسئله را آسان‌تر خواهد نمود. شکل ۲ نتایج مربوط به سطح مقطع دیفرانسیلی در برخورد پوزیترون با اتم هیدروژن است که در گذار از حالت پایه به اولین حالت برانگیخته محاسبه شده است. همان‌طوری‌که در شکل مشاهده می‌شود با افزایش انرژی سطح مقطع دیفرانسیلی با افزایش زاویه پراکندگی سریعاً کاهش می‌یابد. لازم به‌ذکر است گفته شود که نتایج کار حاصل تا زاویه ۶۰ درجه که بیشترین تأثیر را در سطح مقطع کل دارند ارائه شده است. در زوایای بزرگ‌تر پراکندگی مشاهده می‌شود که سطح مقطع دیفرانسیلی خیلی کوچک می‌شود و ما این مسئله را ناشی از این امر می‌دانیم که جملات دیگر تابع وزنی که در محاسبات وارد نشده در زوایای بزرگ‌تر پراکندگی غالب هستند ولی تأثیر چندانی بر سطح مقطع کل نخواهند داشت.

^۶ Exchange effect

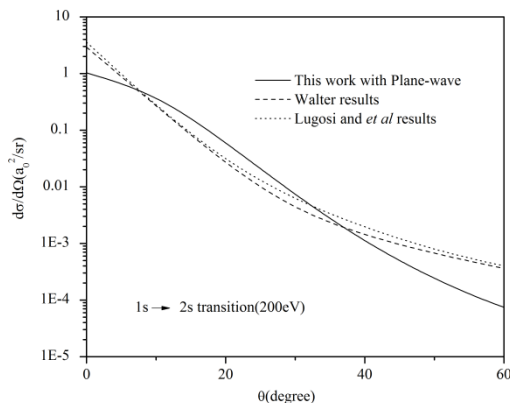


شکل ۶. مقایسه سطح مقطع دیفرانسیلی محاسبه شده در کار حاضر با در نظر گرفتن موج تخت و دو قسمت از موج کولنی در برخورد پوزیترون با اتم هیدروژن در انرژی ۲۰۰ الکترون ولت و در گذار از حالت پایه به اولین حالت برانگیخته.

نظر ما این است که محاسبات انجام شده با موج کولنی در کانال تهییج مانند افزودن پتانسیل پرتابه - هسته در کانال انتقال بار است. به طوری که نشان داده شده با اضافه کردن این جمله به برهم‌کنش الکترونی به دلیل فاز مخربی که بین این دو جمله به وجود می‌آید شاهد کاهش سطح مقطع کل خواهیم بود. این امر برای هر دو انرژی ۱۰۰ eV و ۲۰۰ eV قابل مشاهده است.

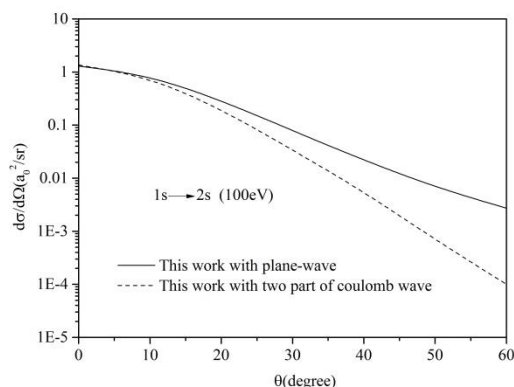
در قسمت دیگری از کار، نتایج به دست آمده با نتایج تئوری موج واپیچیده [۱۸] که یکی از معتبرترین کارهای تئوری انجام شده در کانال تهییج می‌باشد مقایسه شده است. در شکل ۷ این مقایسه برای دو انرژی ۷۵ eV و ۱۰۰ eV از تئوری موج واپیچیده و انرژی‌های ۱۰۰ eV و ۲۰۰ eV از کار حاضر قابل مشاهده است. اگر در مورد انرژی ۱۰۰ eV به هر دو روش دقت نماییم خواهیم دید که در آن ناحیه‌ای که بیشترین تأثیر را در محاسبه سطح مقطع کل دارد دو منحنی روی هم افتاده‌اند. در زوایای کوچکتر و بزرگتر از این ناحیه نتایج کار حاصل زیر منحنی تئوری موج واپیچیده قرار دارد و این امر نشان می‌دهد که افزودن جملات دیگر تابع وزنی که شکل تابع دلتای دیراک را

به اولین حالت برانگیخته با نتایج مسیرهای کلاسیکی مونت کارلو [۱۶] و روش جفت شدگی نزدیک [۱۷].



شکل ۴. مقایسه سطح مقطع دیفرانسیلی محاسبه شده در کار حاضر با در نظر گرفتن موج تخت در برخورد پوزیترون با اتم هیدروژن در انرژی ۲۰۰ الکترون ولت و در گذار از حالت پایه به اولین حالت برانگیخته با نتایج مسیرهای کلاسیکی مونت کارلو [۱۶] و روش جفت شدگی نزدیک [۱۷].

همان‌طور که در شکل‌های ۵ و ۶ مشخص است محاسباتی که توسط امواج کولنی انجام می‌شود در زوایایی که بیشترین تأثیر را بر سطح مقطع کل دارند در زیر نتایج موج تخت قرار می‌گیرند و این امر سبب می‌گردد که نتایج سطح مقطع کل بهبود یافته و به دو نتیجه تئوری‌های یاد شده نزدیک‌تر گردد.



شکل ۵. مقایسه سطح مقطع دیفرانسیلی محاسبه شده در کار حاضر با در نظر گرفتن موج تخت و دو قسمت از موج کولنی در برخورد پوزیترون با اتم هیدروژن در انرژی ۱۰۰ الکترون ولت و در گذار از حالت پایه به اولین حالت برانگیخته.

شده است. نتایج در توافق خوبی با تئوری‌های دیگر خصوصاً با نتایج والتر و جفت شدگی نزدیک در انرژی‌های میانی است. ولی به نظر می‌رسد که جای نتایج تجربی برای بالا بردن دقت مقایسه در این محدوده انرژی خالی است. نکته قابل توجه این است که محاسبات کار حاضر بسیار ساده‌تر از تئوری‌های دیگر از جمله جفت‌شدگی نزدیک و موج واپیچیده که از تئوری‌های معتبر در انرژی‌های میانی هستند می‌باشد و به نظر نویسندگان یک موفقیت در ساده سازی محاسبات عددی مربوط به سطح مقطع کل در مبحث پراکندگی یون-اتم در انرژی‌های میانی محسوب می‌گردد.

پیوست - تابع موج کولنی در فضای تکانه

تابع موج در فضای تکانه به صورت تبدیل فوریه وارون تابع موج در فضای موقعیت یعنی:

$$\phi(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \psi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad \text{پ۱}$$

می‌باشد.

با جایگذاری رابطه:

$$\psi_{k_i}^+(\mathbf{r}) = e^{-\pi\eta_i/2} \Gamma(1+i\eta_i) \times e^{i\mathbf{K}_i\cdot\mathbf{r}_p} {}_1F_1(-i\eta_i, 1; -i(K_i r_p - \mathbf{K}_i \cdot \mathbf{r}_p)) \quad \text{پ۲}$$

در رابطه ۱ داریم:

پ۳

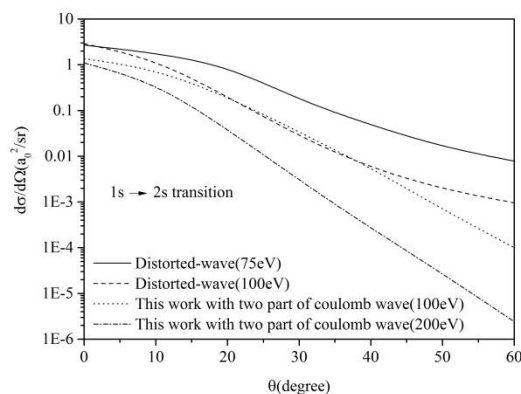
$$\phi_{k_i}^+(\mathbf{k}) = \frac{e^{-\pi\eta_i/2} \Gamma(1+i\eta_i)}{(2\pi)^{3/2}} \times \int e^{i\mathbf{K}_i\cdot\mathbf{r}_p} {}_1F_1(-i\eta_i, 1; -i(K_i r_p - \mathbf{K}_i \cdot \mathbf{r}_p)) d\mathbf{r}_p$$

پس از حل انتگرال بالا در مختصات سهموی [۲۰]

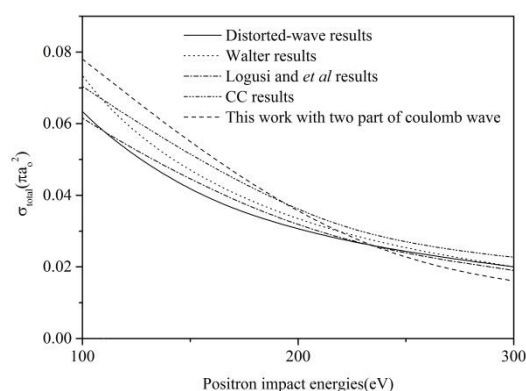
تابع موج ذره عبارت خواهد بود از:

$$\phi_{k_i}^+(\mathbf{k}) = -\frac{1}{2\pi^2} e^{-\pi\eta_i/2} \Gamma(1+i\eta_i) \times \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{(k^2 + (\varepsilon - i k_i)^2)^{i\eta_i}}{(\varepsilon^2 + |\mathbf{k}_i - \mathbf{k}|^2)^{1+i\eta_i}} \right)_{\varepsilon \rightarrow 0} \quad \text{پ۴}$$

ندارند و در این مقاله آورده نشده‌اند می‌تواند در زوایای کوچک و بزرگ پراکندگی ظاهر شود.



شکل ۷. مقایسه سطح مقطع دیفرانسیلی محاسبه شده در کار حاضر با در نظر گرفتن دو قسمت از موج کولنی در برخورد پوزیترون با اتم هیدروژن در انرژی‌های ذکر شده و در گذار از حالت پایه به اولین حالت برانگیخته با نتایج کار تئوری موج واپیچیده [۱۸].



شکل ۸. مقایسه سطح مقطع کل محاسبه شده در کار حاضر با در نظر گرفتن دو قسمت از موج کولنی در برخورد پوزیترون با اتم هیدروژن و در گذار از حالت پایه به اولین حالت برانگیخته با سایر تئوری‌های در دسترس. نتایج روش موج واپیچیده [۱۸] (خط توپر)، نتایج والتر [۱۷] (نقطه چین)، نتایج مسیرهای کلاسیکی مونت کارلو [۱۶] (خط-نقطه چین)، نتایج جفت-شدگی نزدیک [۱۹] (خط-نقطه-نقطه چین)، کار حاضر (خط چین).

در شکل ۸ سطح مقطع کل محاسبه شده در کار حاضر با نتایج سایر تئوری‌های موجود در دسترس مقایسه

$$\varphi_{k_f}^-(\mathbf{k}) = -\frac{\eta_f}{\pi^2} e^{-\pi\eta_f/2} \Gamma(1-i\eta_f) \times \frac{k_f(k^2 - i k_f^2)^{-(1+i\eta_f)}}{|\mathbf{k}_f - \mathbf{k}|^{2(1-i\eta_f)}} \quad \text{پ۱۲}$$

و یا

$$\varphi_{k_f}^-(\mathbf{k}) = e^{-\pi\eta_f/2} \Gamma(1-i\eta_f) \left(\frac{k^2 - k_f^2}{|\mathbf{k}_f - \mathbf{k}|^2} \right)^{-i\eta_f} \times \left((1-i\eta_f)\delta(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}) - \frac{\eta_f k_f}{\pi^2(k^2 - k_f^2)|\mathbf{k}_f - \mathbf{k}|^2} \right)$$

با استفاده از تعریف فرم فاکتور و استفاده از رابطه ۱۹ متن رابطه زیر را خواهیم داشت:

پ۱۴

$$\langle \mathbf{K}_f n_f | V_{pe} | \mathbf{K}_i n_i \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{F_{ij}(\mathbf{q})}{q^2} d\mathbf{q} \times \iint \varphi_{k_f}^*(\mathbf{k}') \varphi_{k_i}^+(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{q}) d\mathbf{k} d\mathbf{k}'$$

با عوض کردن ترتیب انتگرال گیری داریم:

پ۱۵

$$\langle \mathbf{K}_f n_f | V_{pe} | \mathbf{K}_i n_i \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \iint \varphi_{k_f}^*(\mathbf{k}') \varphi_{k_i}^+(\mathbf{k}) \frac{F_{ij}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} d\mathbf{k} d\mathbf{k}'$$

با جانشین کردن روابط ۱۰ و ۱۳ در رابطه ۱۵ داریم:

پ۱۶

$$\langle \mathbf{K}_f n_f | V_{pe} | \mathbf{K}_i n_i \rangle = \frac{2^{3/2}}{\pi^2} e^{-\pi(\eta_i + \eta_f)/2} \times \Gamma(1+i\eta_i) \Gamma(1+i\eta_f) (T_1 + T_2)$$

که در آن

پس از محاسبه مشتق و حدگیری، به شکل:

$$\varphi_{k_i}^+(\mathbf{k}) = -\frac{\eta_i}{\pi^2} e^{-\pi\eta_i/2} \Gamma(1+i\eta_i) \times \frac{k_i(k^2 + i k_i^2)^{i\eta_i - 1}}{|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}|^{2(1+i\eta_i)}} \quad \text{پ۵}$$

در می آید. $\varphi_{k_i}^+(\mathbf{k})$ را می توان به شکل دیگری نیز نوشت که عبارت است از [۲۰]:

$$\varphi_{k_i}^+(\mathbf{k}) = e^{-\pi\eta_i/2} \Gamma(1+i\eta_i) \times \left(\frac{k^2 - k_i^2}{|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}|^2} \right)^{i\eta_i} (f + g) \quad \text{پ۶}$$

که در آن:

$$f = (1+i\eta_i) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi^2(\varepsilon^2 + |\mathbf{k}_i - \mathbf{k}|^2)^2} \quad \text{پ۷}$$

و

$$g = -\frac{\eta_i k_i}{\pi^2(k^2 - k_i^2)|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}|^2} \quad \text{پ۸}$$

می باشند. با توجه به تعریف تابع دلتای دیراک رابطه ۷ به صورت:

$$f = (1+i\eta_i) \delta(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}) \quad \text{پ۹}$$

بازنویسی می شود. با استفاده از روابط ۸ و ۹ داریم:

پ۱۰

$$\varphi_{k_i}^+(\mathbf{k}) = e^{-\pi\eta_i/2} \Gamma(1+i\eta_i) \left(\frac{k^2 - k_i^2}{|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}|^2} \right)^{i\eta_i} \times \left((1+i\eta_i) \delta(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}) - \frac{\eta_i k_i}{\pi^2(k^2 - k_i^2)|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}|^2} \right)$$

تابع موج ذره خروجی در فضای تکانه هم از رابطه:

$$\varphi_{k_f}^-(\mathbf{k}) = \varphi_{k_i}^+(\mathbf{k})^* \quad \text{پ۱۱}$$

به دست می آید. بنابراین می توان نوشت:

مراجع

[1] P.F. Bedaque, E. Braaten, H.W. Hammer, Three-body Recombination in Bose Gases with Large Scattering Length, *Physical Review Letters* 85 (2000) 908-912.

[2] F. Melchert, S. Krüdener, K. Huber, E. Salzborn, Electron detachment in H⁺-H collisions, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 32 (1999) L139-L144.

[3] D. Belkić, Review of Theories on Ionization in Fast Ion/Atom Collisions with Prospects for Applications to Hadron Therapy, *Journal of Mathematical Chemistry* 47 (2010) 1366-1419.

[4] R.K. Smith, N.S. Brickhouse, D.A. Liedahl, J. Raymond, Collisional Plasma Models with APEC/APED: Emission-Line Diagnostics of Hydrogen-like and Helium-like Ions, *The Astrophysical Journal Letters* 556 (2001) L91-L95.

[5] T. Kirchner, Laser-field-induced modifications of electron-transfer processes in ion-atom collisions, *Physical Review A* 69 (2004) 063412-418

[6] M.R.C. McDowell, J.P. Coleman, Introduction to the theory of Ion-Atom scattering, North-Holland, Amsterdam, (1970).

[7] R. Fathi, E. Ghanbari-Adivi, M.A. Bolorizadeh, F. Shojaei, M. J. Brunger, Excitation of hydrogen atoms at intermediate and high energies by proton impact under a three-body Born-Faddeev-type formalism, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 42 (2009) 125203-211.

[8] R.C. Davidson, M.A. Dorf, I.D. Kaganovich, H. Qin, A. Sefkow, E.A. Startsev, D.R. Welch, D.V. Rose, S.M. Lund, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A* 606 (2009) 11-21.

پ ۱۷

$$T_1 = (1+i\eta_f)(1+i\eta_i) \int \delta(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}') \left(\frac{k'^2 - k_f^2}{|\mathbf{k}_f - \mathbf{k}'|^2} \right)^{i\eta_f} d\mathbf{k}' \\ \times \int \left(\frac{k^2 - k_i^2}{|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}|^2} \right)^{i\eta_i} \frac{\delta(\mathbf{k}_i - \mathbf{k})}{(2.25 + |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2)^3} d\mathbf{k}$$

و

$$T_2 = \frac{1}{\pi^4} \int \frac{(k'^2 - k_f^2)^{i\eta_f - 1}}{|\mathbf{k}_f - \mathbf{k}'|^{2(i\eta_f + 1)}} d\mathbf{k}' \\ \times \int \frac{(k^2 - k_i^2)^{i\eta_i - 1}}{(2.25 + |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2)^3 |\mathbf{k}_i - \mathbf{k}|^{2(i\eta_i + 1)}} d\mathbf{k}$$

پ ۱۸

می‌باشند. محاسبه انتگرال رابطه ۱۸ با کامپیوترهای شخصی امکان پذیر نمی‌باشد (دارای تکنیکی است) بنابراین فقط انتگرال رابطه ۱۷ را محاسبه می‌کنیم. با توجه به خواص تابع دلتای دیراک T_1 برابر:

$$T_1 = \frac{(1+i\eta_f)(1+i\eta_i)(0)^{i(\eta_i + \eta_f)}}{(2.25 + |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2)^3}$$

پ ۱۹

خواهد بود. با جایگذاری رابطه ۱۹ در رابطه ۱۶

داریم:

پ ۲۰

$$\langle \mathbf{K}_f n_f | V_{pe} | \mathbf{K}_i n_i \rangle = \frac{2^{3/2} \Gamma(2+i\eta_i) \Gamma(2+i\eta_f) (0)^{i(\eta_i + \eta_f)}}{\pi^2 (2.25 + |\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f|^2)^3}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود رابطه ۲۰ یکی از شکل‌های تابع وزنی مورد بحث است که از ساده‌ترین قسمت محاسبات یعنی قسمتی که شکل تابع دلتای دیراک را داراست ظاهر گردیده و می‌توان قسمت‌های دیگر را نیز یا به شکل تحلیلی و یا عددی در محاسبات وارد نمود.

- [18] A. Ghoshal, P. Mandal, Distorted-wave theory for positron-hydrogen collisions, *Physical Review A* 72 (2005) 032714-720.
- [19] K. Ratnavelu, J. Mitroy and A. T. Stelbovics, The positron-hydrogen system at high energies in a six-state model, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 29 (1996) 2775-2796.
- [20] A.C.T. Chan, Distorted wave born approximation for inelastic atomic collision, Msc thesis, University of Waterloo (2007).
- [9] D.R. Bates, G. Griffing, Inelastic Collisions between Heavy Particles I: Excitation and Ionization of Hydrogen Atoms in Fast Encounters with Protons and with other Hydrogen Atoms, *Proceeding of the Physical Society A* 66 (1953) 961-971.
- [10] J.D. Jackson, H Schiff, Electron Capture by Protons Passing through Hydrogen, *Physical Review* 89 (1953) 359-364.
- [11] J. Macek, S. Alston, Theory of electron capture from a hydrogenlike ion by a bare ion, *Physical Review A* 26 (1982) 250-270.
- [12] N.C. Deb, D.S.F. Crothers, Electron capture into excited s states in the target continuum distorted-wave approximation, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 22 (1989) 3725-3732.
- [13] C.J. Joachain, Quantum collision theory, North Holland, Amsterdam (1975).
- [۱۴] ر. فتحي، ف. شجاعی اکبرآبادی، م.آ. بلوری‌زاده، محاسبه سطح مقطع کل تهییج در برخورد یون برهنه A^{q+} با اتم هیدروژن در گذار از حالت پایه به حالت‌های $2s$ و $3s$ در تقریب بورن-فادیف، مجله پژوهش فیزیک ایران ۳ (۱۳۹۱)، ۵۷-۶۳.
- [15] B.H. Bransden, M.R.C. McDowell, Charge Exchange and Theory of Ion-Atom Collision, Clarendon press, Oxford (1992).
- [16] L. Lugosi, B. Paripas. I. K. Gyemant, K. Tokesi, Differential cross sections for positron impact excitation of hydrogen, *Radiation Physics and Chemistry Journal* 68 (2003) 199-203.
- [17] H.R. Walters, Positron scattering by atomic hydrogen at intermediate energies: $1s$ to $1s$, $1s$ to $2s$ and $1s$ to $2p$ transitions, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 21 (1988) 1893-1906.