

بررسی کوآنتومی انرژی میدان الکترومغناطیسی در حضور فرامواد

مرجان جعفری^۱

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

دریافت: ۱۳۹۵/۰۸/۰۶ ویرایش نهایی: ۱۳۹۵/۱۲/۱۶ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۳/۰۸

چکیده

در این مقاله، طبیعت کوآنتومی میدان الکترومغناطیسی در حضور فرامواد مورد مطالعه قرار گرفت. در این راستا، میدان الکترومغناطیسی در حضور فرامواد به صورت کانونیک کوانتیزه می‌شود. با استفاده از معادلات اوایلر-لاگرانژ، معادله حرکت لانژون برای میدان الکترومغناطیسی به دست می‌آید. معادله لانژون با استفاده از روش تبدیل لاپلاس محاسبه شده و پتانسیل برداری برحسب عملگرهای نوفه در فراماده به دست می‌آید. با در نظر گرفتن یک ویژه حالت گرمایی عام برای اتلافگر، تابع برهم‌کنش دو نقطه میدان الکترومغناطیسی در دمای محدود محاسبه می‌شود. بر اساس قضیه نوتر و اصل پایستگی انرژی، در ویژه حالت کوآنتومی گرمایی، چگالی انرژی، شار انرژی میدان الکترومغناطیسی و انرژی جذب شده در فراماده محاسبه می‌شود.

کلیدواژگان: تابع برهم‌کنش دو نقطه‌ای، کوانتس میدان الکترومغناطیسی، فرامواد، قضیه نوتر.

مقدمه

سوپرنزینگ^۲ [۳ و ۴] هایپرنزینگ^۳ [۵] و عکس بودن راستای بردار پوئین‌تینگ با بردار انتشار موج [۶]. اخیراً به صورت تجربی و نظری نشان داده شده است که امواج پلاسمونی مغناطیسی در فرامواد دارای طبیعت کوآنتومی می‌باشند و فرامواد می‌توانند برای انتشار امواج غیرکلاسیکی الکترومغناطیسی مفید باشند [۷]. بنابراین با ظهور پدیده‌های کوآنتومی در فرامواد، دانشمندان به بررسی پدیده‌هایی همچون برهم‌کنش امواج الکترومغناطیسی کوآنتومی و فرامواد روی آوردند [۸ و ۹]. پیشرفت‌های اخیر در زمینه علم فرامواد، امکان کنترل شار امواج الکترومغناطیسی در این مواد را فراهم کرده است. در نظریه ماکسول، شار امواج الکترومغناطیسی به وسیله بردار پوئین‌تینگ محاسبه می‌شود، بنابراین محاسبه بردار پوئین‌تینگ نیز

رشد سریع علم فرامواد در زمینه نظری و کاربردهای آن در مقیاس نانو، دانشمندان را به بررسی کوآنتومی میدان الکترومغناطیسی در حضور فرامواد، سوق داد [۱]. انتشار امواج الکترومغناطیسی در مواد با ضریب شکست منفی اولین بار توسط وسلایگ^۱ مورد بررسی قرار گرفت [۲]. فرامواد دارای ساختار مصنوعی می‌باشند و نفوذپذیری الکتریکی و یا تراوایی مغناطیسی و ضریب شکست در این مواد منفی می‌باشد. چنین موادی اصطلاحاً مواد چپگرد نیز گفته می‌شود. منفی بودن ضریب شکست در این مواد باعث ظهور پدیده‌ها و ویژگی‌های فیزیکی متفاوتی، از آنچه در علم الکترومغناطیس تاکنون مشاهده شده، می‌شود. برای مثال اثر دوپلر معکوس، تابش چرنکف معکوس،

* نویسنده مسئول: m.jafari@sci.ikiu.ac.ir

¹Veselage

²Superlensing

³Hyperlensing

در بخش دوم این مقاله، مختصری درباره فرامواد توضیح داده می‌شود. در بخش سوم، لاگراژی سامانه معرفی شده و معادلات کلاسیک به دست می‌آیند. در بخش چهارم، میدان الکترومغناطیسی در حضور مگنتو-فرامواد، به صورت کانونیک کوانتیزه می‌شود و پتانسیل برداری محاسبه می‌شود. در بخش پنجم، با استفاده از پتانسیل برداری، تابع برهم‌کنش دو نقطه میدان الکترومغناطیسی در دمای محدود محاسبه می‌شود و سپس شار انرژی، چگالی انرژی و انرژی جذب شده فرامواد مورد محاسبه قرار می‌گیرد.

فرامواد

در این بخش، مواد با نفوذپذیری الکتریکی $\varepsilon(\omega)$ و تراوایی مغناطیسی $\mu(\omega)$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که توابع مختلط وابسته به فرکانس می‌باشند [۱۲]:

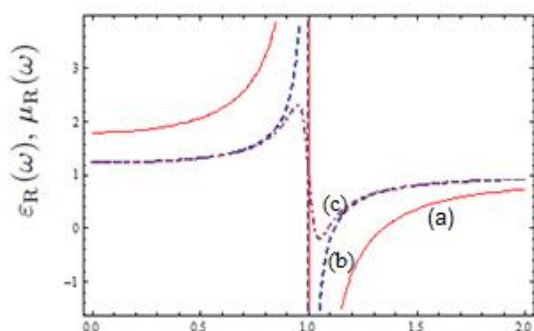
$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_r(\omega) + i\varepsilon_i(\omega) \quad ۱$$

$$\mu(\omega) = \mu_r(\omega) + i\mu_i(\omega) \quad ۲$$

تقسیم‌بندی مواد با تحلیل مقادیر $\varepsilon_r(\omega), \mu_r(\omega)$ صورت می‌گیرد. گروه اول مواد با $\varepsilon_r(\omega) > 0$ و $\mu_r(\omega) > 0$ می‌باشد که مواد دوگان مثبت نامیده می‌شوند. مواد موجود در طبیعت در این گروه قرار می‌گیرند. گروه دوم، مواد با $\varepsilon_r(\omega) < 0$ و $\mu_r(\omega) > 0$ هستند که دارای نفوذپذیری الکتریکی منفی، گروه سوم مواد با $\varepsilon_r(\omega) > 0$ و $\mu_r(\omega) < 0$ هستند که دارای تراوایی منفی هستند و گروه چهارم، مواد با $\varepsilon_r(\omega) < 0$ و $\mu_r(\omega) < 0$ هستند که دوگان منفی نامیده می‌شوند. این سه گروه آخر فرامواد نامیده می‌شوند و بیشتر به صورت مصنوعی ساخته می‌شوند. رابطه بین ضریب شکست، نفوذپذیری الکتریکی و تراوایی مغناطیسی عبارت است از:

در علم فرامواد مفید می‌باشد. برهم‌کنش امواج الکترومغناطیسی در حضور فرامواد در تعدادی از مقالات مورد بررسی قرار گرفته است [۹،۱۰] ولی تاکنون گزارشی که به صورت کوآتومی برهم‌کنش امواج الکترومغناطیسی با فرامواد با خاصیت قطبش و مغناطش را مورد بررسی قرار دهد و انرژی سامانه را با دیدگاه کوانتس کانونیک مورد مطالعه قرار دهد، صورت نگرفته است.

هدف اصلی این مقاله، گسترش مبحث کوانتس کانونیک میدان الکترومغناطیسی در حضور مگنتو-فرامواد می‌باشد. بدین ترتیب، پس از فرآیند کوانتس میدان الکترومغناطیسی در حضور فرامواد، تابع برهم‌کنش دو نقطه میدان الکترومغناطیسی در دمای متناهی محاسبه می‌شود این محاسبات با این شکل کلی برای اولین بار انجام می‌شود و در حالت خاص که از خاصیت مغناطیسی ماده صرف نظر شود، محاسبات مشابه وجود دارد که با نتایج حاصل از مقاله در انطباق است. سپس با استفاده از نظری نوتر و کنش سامانه، شار انرژی و چگالی انرژی میدان الکترومغناطیسی در حضور فراماده مورد محاسبه قرار می‌گیرد. برای دستیابی به این هدف، یک لاگراژی برای سامانه شامل فراماده و میدان الکترومغناطیسی معرفی می‌شود [۱۱]. پس از کوانتس کانونیک میدان الکترومغناطیسی در حضور ماده، تانسور انرژی و تکانه سامانه برای حالت کلاسیک و کوآتومی به دست می‌آید. انرژی کل میدان الکترومغناطیسی در حضور مگنتو-فرامواد، پایسته می‌باشد، زیرا اتلاف انرژی الکترومغناطیسی به وسیله ماده در محاسبات در نظر گرفته شده است. با استفاده از قضیه نوتر، چگالی انرژی و شار انرژی سامانه محاسبه می‌شود و همچنین انرژی جذب شده توسط فرامواد، با استفاده از اصل پایستگی انرژی مورد محاسبه قرار می‌گیرد.



شکل ۱. نمودار تغییرات بخش حقیقی نفوذپذیری الکتریکی و تراوایی مغناطیسی برحسب فرکانس.

$$\frac{\omega_{p(e,m)}}{\omega_{0(e,m)}} = 0.3, \frac{\gamma_{(e,m)}}{\omega_{0(e,m)}} = 0.001 \quad \text{(a) نمودار}$$

$$\frac{\omega_{p(e,m)}}{\omega_{0(e,m)}} = 0.5, \frac{\gamma_{(e,m)}}{\omega_{0(e,m)}} = 0.001 \quad \text{(b) نمودار}$$

$$\frac{\omega_{p(e,m)}}{\omega_{0(e,m)}} = 0.5, \frac{\gamma_{(e,m)}}{\omega_{0(e,m)}} = 0.1 \quad \text{(c) نمودار}$$

دینامیک کلاسیک

رفتار الکترون‌ها در مگنتوفرامواد را مشابه روش هانتز-بارنت، می‌توان با دو سری نوسانگر هارمونیک مستقل از یکدیگر توصیف کرد که خواص قطبش و مغناطش فراماده را بیان می‌کنند و نقش اتلافگر را در سامانه دارند [۱۱]. بدین ترتیب، کنش سامانه مگنتوفراماده برهم‌کنشی با میدان الکترومغناطیسی عبارت است از:

$$S[A, X_w, Y_w] = S_{res}[X_w, Y_w] + S_{Em}[A] + S_{int}[A, X_w, Y_w] \quad 5$$

که کنش میدان الکترومغناطیسی

$$S_{Em}[A] = \frac{1}{2} \int d\vec{r} \int dt \left(\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) \right) \quad 6$$

است و کنش اتلافگر $S_{res}[X_w, Y_w]$ عبارت است از:

$$n^2(\omega) = [n_r(\omega) + in_I(\omega)]^2 \times [\epsilon_r(\omega) + i\epsilon_I(\omega)][\mu_r(\omega) + i\mu_I(\omega)] \quad 3$$

که n_r و n_I به ترتیب با ضریب جذب و سرعت فاز میدان الکترومغناطیسی در مواد ارتباط دارند. در این مقاله، از مدل دروده-لورنتس برای توصیف رفتار ماده استفاده شده است. به عبارت دیگر، رفتار حرکت الکترون‌ها در ماده برحسب نوسانگرهای هماهنگ میرا توصیف می‌شود [۱۲]:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{0e}^2 - \omega^2 - i\gamma_e \omega}, \quad 4$$

$$\mu(\omega) = 1 + \frac{\omega_{pm}^2}{\omega_{0m}^2 - \omega^2 - i\gamma_m \omega}$$

که ω_{pe} و ω_{pm} به ترتیب بسامد پلاسمای الکتریکی و مغناطیسی، ω_{0e} و ω_{0m} بسامد تشدید الکتریکی و مغناطیسی و γ_e و γ_m ضریب میرایی الکتریکی و مغناطیسی می‌باشد. قسمت حقیقی نفوذپذیری الکتریکی و تراوایی مغناطیسی به ترتیب در بازه بسامد

$$\omega_{0e} < \omega < \sqrt{\omega_{0e}^2 + \omega_{pe}^2}$$

$$\omega_{0m} < \omega < \sqrt{\omega_{0m}^2 + \omega_{pm}^2}$$

می‌توان گفت ماده در بازه فرکانس

$$\{Max(\omega_{0p}, \omega_{0m}), Min(\sqrt{\omega_{0e}^2 + \omega_{pe}^2}, \sqrt{\omega_{0m}^2 + \omega_{pm}^2})\}$$

ضریب شکست منفی می‌باشد و در گروه فرامواد جای دارند و در بازه فرکانس

$$\{Min(\omega_{0p}, \omega_{0m}), Max(\sqrt{\omega_{0e}^2 + \omega_{pe}^2}, \sqrt{\omega_{0m}^2 + \omega_{pm}^2})\}$$

گروه فرامواد دوگان منفی می‌باشد (شکل ۱). بنابراین

بررسی رفتار ماده در این بازه فرکانسی به مثابه بررسی

رفتار فراماده می‌باشد.

با استفاده از روابط ۶-۸، لاگرانژی سامانه در فضای

وارون به صورت زیر نوشته می شود [۱۳]:

$$L = \sum_{\lambda=1}^3 \int_0^{\infty} d\omega \int d^3k \left(\left| \dot{X}_{\omega}(k, t) \right|^2 - \omega^2 \left| X_{\omega}(k, t) \right|^2 + \left| \dot{Y}_{\omega}(k, t) \right|^2 - \omega^2 \left| Y_{\omega}(k, t) \right|^2 \right) + \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \left(\varepsilon_0 \left| \dot{A}_{\lambda}(k, t) \right|^2 - \frac{1}{\mu_0} \left| k \times \vec{A}(k, t) \right|^2 \right) + \sum_{\lambda=1}^3 \int d\omega \int d^3k \left(-f(\omega) \dot{A}_{\lambda}(k, t) X_{\omega}^*(k, t) + c.c \right) + \sum_{\lambda=1}^3 \int d\omega \int d^3k \left(g(\omega) \vec{k} \times \vec{A}(k, t) \cdot \vec{Y}_{\omega}^*(k, t) + c.c \right)$$

که $X_{\omega}^*(k, t) = X_{\omega}(-k, t)$ با استفاده از معادلات اویلر-لاگرانژ، معادلات حرکت پتانسیل برداری و اتلافگرها به دست می آیند که عبارتند از:

$$\varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\vec{A}}(k, t) - \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{A}(k, t)) = \mu_0 f(\omega) \dot{\vec{X}}_{\omega}(k, t) + i \mu_0 g(\omega) \vec{k} \times \vec{Y}_{\omega}(k, t) \quad 12$$

$$\ddot{\vec{X}}_{\omega}(k, t) + \omega^2 \vec{X}_{\omega}(k, t) = -f(\omega) \dot{\vec{A}}(k, t), \quad 13$$

$$\ddot{\vec{Y}}_{\omega}(k, t) + \omega^2 \vec{Y}_{\omega}(k, t) = i g(\omega) \vec{k} \times \vec{A}(k, t)$$

پاسخ معادله های دیفرانسیل ۱۳ از دو بخش تشکیل شده است:

$$\vec{X}_{\omega}(k, t) = \vec{X}_{\omega}^N(k, t) + f(\omega) \int_0^t dt' \frac{\sin(\omega(t-t'))}{\omega} E(k, t'),$$

$$\vec{Y}_{\omega}(k, t) = \vec{Y}_{\omega}^N(k, t) + g(\omega) \int_0^t dt' \frac{\sin(\omega(t-t'))}{\omega} B(k, t'),$$

بخش اول، پاسخ همگن معادله است که به شرایط اولیه اتلافگر بستگی دارد و به صورت عملگر نوفه تعریف می شود و بخش دوم، پاسخ ناهمگن معادله می باشد که به میدان الکتریکی و مغناطیسی وابسته است. با

$$S_{res}[X_{\omega}, Y_{\omega}] = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\omega \int d\vec{r} \int dt \left(\partial_t \vec{X}_{\omega}(\vec{r}, t) \cdot \partial_t \vec{X}_{\omega}(\vec{r}, t) - \omega^2 \vec{X}_{\omega}(\vec{r}, t) \cdot \vec{X}_{\omega}(\vec{r}, t) \right) + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\omega \int d\vec{r} \int dt \left(\partial_t \vec{Y}_{\omega}(\vec{r}, t) \cdot \partial_t \vec{Y}_{\omega}(\vec{r}, t) - \omega^2 \vec{Y}_{\omega}(\vec{r}, t) \cdot \vec{Y}_{\omega}(\vec{r}, t) \right)$$

و $S_{int}[A, X_{\omega}, Y_{\omega}]$ کنش برهم کنش خطی بین ماده و میدان الکترومغناطیسی با ثابت جفت شدگی $f(\omega), g(\omega)$ را نشان می دهد:

$$S_{int}[A, X_{\omega}, Y_{\omega}] = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\omega \int d\vec{r} \int dt \left(f(\omega) \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{X}_{\omega}(\vec{r}, t) + g(\omega) \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{Y}_{\omega}(\vec{r}, t) \right) \quad 8$$

که $\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t)$ و

به ترتیب میدان مغناطیسی و الکتریکی و $\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}$

پتانسیل برداری می باشند. کنش میدان الکترومغناطیسی در پیمانه کولمب نوشته شده است: $\vec{A}_0 = 0$ و $\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$ ، بنابراین پتانسیل برداری دو مؤلفه عمودی در راستای بردار یکه خواهد داشت $(e_{\lambda}(k), \lambda = 1, 2)$.

برای سادگی در فضای وارون محاسبات را ادامه می دهیم. بازه تغییرات متغیر k در فضای وارون محدود به نیم فضا می شود. بنابراین:

$$A(k, t) = \sum_{\lambda=1}^2 A_{\lambda}(k, t) e_{\lambda}(k) \quad 9$$

و میدان اتلافگرها برحسب مؤلفه های عمودی و افقی عبارت هستند از:

$$X_{\omega}(k, t) = \sum_{\lambda=1}^3 X_{\lambda\omega}(k, t) e_{\lambda}(k),$$

$$Y_{\omega}(k, t) = \sum_{\lambda=1}^3 Y_{\lambda\omega}(k, t) e_{\lambda}(k) \quad 10$$

جای‌گذاری ۱۴ در ۱۲، معادله موج ناهمگن لانژون برای پتانسیل برداری به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\vec{A}}(k, t) - |k|^2 \vec{A}(k, t) + \\ & \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int dt \chi_e(t-t') \dot{\vec{A}}(k, t) + \\ & i \mu_0 \vec{k} \times \int dt \chi_m(t-t') \vec{k} \times \vec{A}(k, t) = \\ & \mu_0 f(\omega) \partial_t \vec{X}_\omega^N(k, t) + i \mu_0 g(\omega) \vec{k} \times \vec{Y}_\omega^N(k, t) \end{aligned} \quad ۱۵$$

که در عبارت بالا χ_m و χ_e به ترتیب پذیرفتاری مغناطیسی و الکتریکی ماده هستند که برحسب توابع جفت‌شدگی عبارتند از:

$$\begin{aligned} c_e(t-t') &= \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^\infty dw \frac{\sin(w(t-t'))}{w} f^2(w) & t > t' \\ 0 & t < t' \end{cases}, \\ c_m(t-t') &= \begin{cases} m_0 \int_0^\infty dw \frac{\sin(w(t-t'))}{w} g^2(w) & t > t' \\ 0 & t < t' \end{cases} \end{aligned} \quad ۱۶$$

نمود پذیرایی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی برحسب پذیرفتاری‌های ماده عبارتند از

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &= 1 + \chi_e(\omega), \\ \frac{1}{\kappa(\omega)} &= \mu(\omega) = 1 + \chi_m(\omega) \end{aligned} \quad ۱۷$$

و با استفاده از رابطه ۱۶ پذیرفتاری‌های الکتریکی و مغناطیسی برحسب فرکانس به‌دست می‌آید

$$\chi_e(\omega) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^\infty d\omega' \frac{f^2(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2 - i0^+}, \quad ۱۸$$

$$\chi_m(\omega) = \mu_0 \int_0^\infty d\omega' \frac{g^2(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2 - i0^+}, \quad ۱۹$$

بنا بر اصل علیت، قسمت حقیقی و موهومی پذیرفتاری‌ها که به ترتیب مسئول پاشندگی و جذب امواج الکترومغناطیسی در ماده هستند، در رابطه کرامرز-کرونیکر صدق می‌کنند [۱۲]. قسمت موهومی

تابع دی‌الکتریک برحسب توابع جفت‌شدگی به‌صورت زیر می‌باشد [۱۳]

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\pi}} \varepsilon_I(\omega), \\ g(\omega) &= \sqrt{-\frac{2\omega}{\pi\mu_0}} \kappa_I(\omega) \end{aligned} \quad ۲۰$$

دینامیک کوآتومی

برای انجام فرآیند کوانتس، با استفاده از لاگرانژی سامانه، مزدوج کانونیک متغیرهای A و X_ω, Y_ω را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} -D^\perp(k, t) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_\lambda^*} \\ \varepsilon_0 \dot{A}_\lambda(k, t) - f(\omega) X_{\omega\lambda}^\perp(k, t) \end{aligned} \quad ۲۱$$

$$Q_{\omega\lambda}(k, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_{\omega\lambda}^*} = \dot{X}_{\omega\lambda}(k, t), \quad ۲۲$$

$$\Pi_{\omega\lambda}(k, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_{\omega\lambda}^*} = \dot{Y}_{\omega\lambda}(k, t),$$

با برقراری رابطه جابه‌جایی در زمان یکسان بین متغیرهای میدان و مزدوج کانونیک آن‌ها، سامانه به‌صورت کانونیک کوانتیزه می‌شود

$$[A_\lambda^*(k, t), -D_{\lambda'}^\perp(k', t)] = i\hbar \delta_{\lambda\lambda'} \delta(k - k'), \quad ۲۳$$

$$[X_{\omega\lambda}^*(k, t), Q_{\omega'\lambda'}(k', t)] = i\hbar \delta_{\lambda\lambda'} \delta(k - k') \delta(\omega - \omega'), \quad ۲۴$$

$$[Y_{\omega\lambda}^*(k, t), \Pi_{\omega'\lambda'}(k', t)] = i\hbar \delta_{\lambda\lambda'} \delta(k - k') \delta(\omega - \omega'), \quad ۲۵$$

و تمام روابط جابجاگری دیگر صفر می‌باشند. برای سادگی محاسبات، عملگرهای خلق و نابودی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم [۱۳]

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{i}{\epsilon_0} \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{\hbar\omega}{16\pi^3}} f(\omega) \left(\frac{d_\lambda(k, \omega, 0) e^{i(k \cdot r - \omega t)}}{-\omega^2 \epsilon(\omega) + c^2 k^2 \kappa(\omega)} - h.c \right) e_\lambda(k) \quad ۳۱$$

$$g(\omega) \left(\frac{b_\lambda(k, \omega, 0) e^{i(k \cdot r - \omega t)}}{-\omega^2 \epsilon(\omega) + c^2 k^2 \kappa(\omega)} - h.c \right) s_\lambda(k),$$

که $s_\lambda(k) = \hat{k} \times e_\lambda(k)$ است. با استفاده از پتابسیل برداری رابطه بالا، میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی برهم‌کنشی در حضور مواد قابل محاسبه است.

چگالی و شار انرژی

بر اساس قضیهٔ نوتر، تمام تقارن‌های قابل تمایز در کنش یک سامانهٔ فیزیکی، مطابق با یک کمیت پایسته در سامانه مورد بررسی می‌باشند. قوانین پایستگی که وجود کمیت‌هایی را بیان می‌کنند که مستقل از تحول دینامیکی سامانه با زمان تغییر نمی‌کنند، نقش مهمی در فیزیک بازی می‌کنند. بنابر قضیهٔ نوتر می‌توان نشان داد که کنش ۵-۸ تحت تبدیلات زمانی ناوردا می‌باشند. پایستگی انرژی منتج از ناوردایی کنش تحت این تبدیل است [۱۲]

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot S = 0 \quad ۳۲$$

که چگالی انرژی و S شار انرژی و یا بردار پوینتینگ هستند که برای کنش سامانه مورد مطالعه عبارت خواهد بود با [۱۴]:

$$\rho = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{c^2} \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right] + \int_0^\infty d\omega \left[\frac{1}{2} (\partial_t \vec{X}_\omega)^2 + \frac{1}{2} (\partial_t \vec{Y}_\omega)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 (\vec{X}_\omega^2 + \vec{Y}_\omega^2) - g(\omega) \vec{Y}_\omega \cdot \vec{B} \right], \quad ۳۳$$

$$a_\lambda(k, t) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar c \epsilon_0 |k|}} (\epsilon_0 c |k| A_\lambda(k, t) - i D_\lambda^+(k, t)),$$

$$b_\lambda(k, \omega, t) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar \omega}} (\omega X_{\omega\lambda}(k, t) + i Q_{\omega\lambda}(k, t)), \quad ۲۷$$

$$d_\lambda(k, \omega, t) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar \omega}} (\omega Y_{\omega\lambda}(k, t) + i \Pi_{\omega\lambda}(k, t)), \quad ۲۸$$

و عملگر نوفه برحسب عملگرهای خلق و نابودی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X_\omega^N(k, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (e^{-i\omega t} \hat{d}(k, \omega, 0) + e^{i\omega t} \hat{d}^\dagger(k, \omega, 0)) e_\lambda(k), \quad ۲۹$$

$$Y_\omega^N(k, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (e^{-i\omega t} \hat{b}(k, \omega, 0) + e^{i\omega t} \hat{b}^\dagger(k, \omega, 0)) e_\lambda(k), \quad ۳۰$$

متغیرهای کانونیک A و X_ω, Y_ω را با استفاده از روابط (۲۷-۲۹)، می‌توان برحسب عملگرهای خلق و نابودی بازنویسی کرد.

برای حل معادله موج ۱۵، از روش تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم. با جای‌گذاری عملگرهای نوفه برحسب عملگرهای خلق و نابودی (۳۰-۳۱)، پتابسیل برداری را در حد زمان‌های طولانی به دست می‌آوریم

با محاسبه مقدار انتظاری توابع برهم‌کنش، می‌توان بردار پوئین‌تینگ را محاسبه نمود. با استفاده از پتانسیل برداری رابطه ۳۲، میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی در فضای فوریه محاسبه شده و سپس با استفاده از رابطه ۳۶ تابع برهم‌کنش دونقطه میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی برحسب فرکانس به دست می‌آید که عبارت است از:

$$\begin{aligned} \langle E^\dagger(r, \omega) \times B(r', \omega') \rangle &= \\ \frac{N(\omega)}{N(\omega) + 1} \langle E(r, \omega) \times B^\dagger(r', \omega') \rangle &= \\ -\hat{k} \frac{\hbar \omega^2}{2\pi^2 c^2 \epsilon_0} \delta(\omega - \omega') N(\omega) & \\ \times \left[(n(\omega) \epsilon_I(\omega) + n^3(\omega) \kappa_I(\omega)) \frac{e^{in\omega|r-r'|/c}}{|r-r'|} - h.c \right] & \end{aligned} \quad (37)$$

برای محاسبه بردار پوین‌تینگ لازم است توابع برهم‌کنش یک نقطه‌ای را به دست آوریم. از آنجایی که عبارت بالا به‌ازای $r = r'$ دارای تکینگی می‌باشد، با رفع تکینگی تابع برهم‌کنش در یک نقطه به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \langle E^\dagger(r, \omega) \times B(r, \omega') \rangle &= -\hat{k} \frac{\hbar \omega^4}{4\pi^3 c^4 \epsilon_0} \delta(\omega - \omega') \\ N(\omega) (\epsilon_I(\omega) + (n^2(\omega) + n^{*2}(\omega)) \kappa_I(\omega)) & \end{aligned} \quad (38)$$

برای محاسبه مقدار انتظاری چگالی انرژی لازم است $\langle E(r, \omega) \otimes Y_\omega(r', \omega') \rangle$ نیز محاسبه شود. با استفاده از ۱۴، ۳۱ و ۳۲ تابع برهم‌کنش دو نقطه‌ای میدان الکتریکی و اتلافگر، نتیجه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} - \int_0^\infty d\omega g(\omega) \vec{E} \times \vec{Y}_\omega \quad (34)$$

از آنجایی که در فرامواد میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی و بردار موج سامانه چپگرد هستند، بنابراین راستای بردار پوین‌تینگ و بردار موج در خلاف جهت یکدیگر می‌باشند. بدین ترتیب، محاسبه بردار پوین‌تینگ در دمای محدود مورد توجه می‌باشد. برای محاسبه شار انرژی، فرض می‌شود که ویژه‌حالت میدان کوآنتومی اتلافگر در حالت گرمایی آمیخته می‌باشد. مقدار انتظاری عملگر تعداد در تعادل گرمایی عبارت است از [۱۵]:

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_\lambda^\dagger(k, \omega) \otimes \hat{a}_\lambda(k', \omega') \rangle_T &= \\ N(\omega) \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\omega - \omega') \delta(k - k') & \\ \langle \hat{b}_\lambda^\dagger(k, \omega) \otimes \hat{b}_\lambda(k', \omega') \rangle_T &= \\ N(\omega) \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\omega - \omega') \delta(k - k') & \\ N(\omega) = \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1} & \end{aligned} \quad (35)$$

با استفاده از رابطه ۳۵ مقدار انتظاری بردار پوین‌تینگ برحسب توابع برهم‌کنش به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \langle S(r, t) \rangle &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\omega' \\ \left\{ \exp[-i(\omega - \omega')t] \left[\frac{1}{\mu_0} \langle E(r, \omega) \times B^\dagger(r, \omega') \rangle - \int_0^\infty d\omega'' g(\omega'') \langle E(r, \omega) \times Y_{\omega''}^\dagger(r, \omega') \rangle \right] \right. & \\ \left. + \exp[i(\omega - \omega')t] \left[\frac{1}{\mu_0} \langle E^\dagger(r, \omega) \times B(r, \omega') \rangle - \int_0^\infty d\omega'' g(\omega'') \langle E^\dagger(r, \omega) \times Y_{\omega''}^\dagger(r, \omega') \rangle \right] \right\} & \end{aligned} \quad (36)$$

همان گونه که در رابطه بالا مشاهده می شود، شار انرژی با قسمت حقیقی و موهومی پذیرفتاری الکتریکی و مغناطیسی ماده در ارتباط می باشد. عبارت به دست آمده برای شار انرژی در حالت خاص که پذیرفتاری مغناطیسی ماده صفر باشد، عبارت است از:

$$\langle S(r, t) \rangle = \hat{k} \int_0^\infty d\omega \frac{3\hbar\omega^3}{c^2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \varepsilon_i(\omega) \quad ۴۳$$

که رابطه ۴۴ در انطباق کامل با نتایج محققین دیگر می باشد [۱۶].

برای محاسبه چگالی انرژی در رابطه ۳۴ لازم است تابع برهم کنش دوقطه ای میدان الکتریکی و تابع برهم کنش دوقطه ای میدان مغناطیسی نیز محاسبه گردد. تابع برهم کنش دوقطه ای هم زمان برای عملگرهای میدان الکتریکی با استفاده از رابطه ۳۲ به صورت زیر به دست می آید

۴۴

$$\langle E(r, t) \otimes E(r', t) \rangle = \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar}{24\pi^3 \varepsilon_0} \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \left(\frac{\varepsilon_i(\omega) + n^2(\omega)\kappa_i(\omega) e^{i\omega|r-r'|/c}}{n^2(\omega) - n^{*2}(\omega)} \frac{1}{|r-r'|} - h.c \right)$$

و مقدار تابع برهم کنش یک نقطه پس از رفع تکینگی رابطه بالا به ازای $r = r'$ عبارت است از:

۴۵

$$\langle E(r, t) \otimes E(r, t) \rangle = \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar}{6\pi^3 \varepsilon_0} \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \left(\frac{n(\omega)\varepsilon_i(\omega) + n^3(\omega)\kappa_i(\omega)}{n^2(\omega) - n^{*2}(\omega)} - h.c \right)$$

که در حالت خاصی که مغناطش ماده صفر باشد، به روابط مرجع ۱۶ منتج می شود. همچنین تابع برهم کنش دوقطه ای برای عملگرهای میدان الکترومغناطیسی نیز با استفاده از پتانسیل برداری سامانه به دست می آید:

$$\begin{aligned} \langle E(r, \omega) \otimes Y_\omega(r', \omega') \rangle &= \\ \langle E(r, \omega) \otimes Y_\omega^N(r', \omega') \rangle &+ \frac{g(\omega)}{2\omega} \left(\frac{1}{\omega - \omega' - i0^+} + \frac{1}{\omega + \omega'} \right) \\ &\times \langle E(r, \omega) \otimes B(r', \omega') \rangle \end{aligned} \quad ۳۹$$

که جمله دوم برهم کنش با استفاده از رابطه ۳۸ محاسبه می شود و جمله اول تابع برهم کنش با استفاده از روابط ۳۲ و ۳۱ به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \langle E(r, \omega) \otimes Y_\omega^N(r', \omega') \rangle &= \\ -\hat{k} \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 \pi c} \frac{g(\omega)}{\sqrt{\omega\omega'}} \delta(\omega - \omega') \delta(\omega' - \omega'') & \\ \times \left[N(\omega) n(\omega) \frac{e^{i\omega|r-r'|/c}}{|r-r'|} + \right. & \\ \left. (N(\omega) + 1) n^*(\omega) \frac{e^{-i\omega|r-r'|/c}}{|r-r'|} \right] & \end{aligned} \quad ۴۰$$

تابع تک نقطه ای رابطه بالا پس از رفع تکینگی عبارت است از:

$$\begin{aligned} \langle E(r, \omega) \otimes Y_\omega^N(r, \omega') \rangle &= \\ -\hat{k} \frac{\hbar\omega^2}{\varepsilon_0 \pi c} \frac{g(\omega)}{\sqrt{\omega\omega'}} \delta(\omega - \omega') \delta(\omega' - \omega'') & \\ \times (N(\omega) n^2(\omega) + (N(\omega) + 1) n^{*2}(\omega)) & \end{aligned} \quad ۴۱$$

شار انرژی الکترومغناطیسی در فراماده در دمای محدود برحسب زمان را با جای گذاری ۴۲ و ۳۹ در رابطه ۳۷ به دست می آید:

۴۲

$$\begin{aligned} \langle S(r, t) \rangle &= \\ -\hat{k} \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar\omega^3}{c^2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) & \\ \left\{ (1 - \kappa_i(\omega)) \varepsilon_i(\omega) - (1 + \kappa_i(\omega)) \kappa_i(\omega) (n^2(\omega) + n^{*2}(\omega)) \right\} & \\ = \hat{k} \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar\omega^3}{c^2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) & \\ \left\{ (3 + \kappa_i(\omega)) \varepsilon_i(\omega) - 2(1 + \kappa_i(\omega)) \kappa_i(\omega) \frac{\varepsilon_i(\omega)}{\kappa_i(\omega)} \right\}, & \end{aligned}$$

استفاده از روابط ۳۰ و ۳۱ محاسبه می‌شود که عبارت است از:

$$\langle Q \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega \left[(\partial_t X_\omega^N)^2 + \omega^2 X_\omega^{N2} \right] \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega \left[(\partial_t Y_\omega^N)^2 + \omega^2 Y_\omega^{N2} \right] \right\rangle = 2\pi^2 \hbar \omega \coth \left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T} \right). \quad (48)$$

رابطه بالا در دمای صفر عبارت است از $\langle Q \rangle = 2\pi^2 \hbar \omega$ که در واقع نوفه کوآنتومی سامانه می‌باشد و طبیعت کاملاً کوآنتومی دارد.

نتیجه‌گیری

میدان الکترومغناطیسی در حضور فرامواد به صورت کانونیک کوانتیزه شده و عملگر پتانسیل برداری برحسب عملگرهای خلق و نابودی ماده به دست آمد. با استفاده از پتانسیل برداری، تابع برهم‌کنش دو نقطه میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی در دمای متناهی محاسبه گردید. به عنوان کاربردی از توابع برهم‌کنش، با استفاده از نظریه نوتر، شار انرژی و چگالی انرژی و انرژی جذب شده میدان الکترومغناطیسی در حضور فراماده با خاصیت قطبش و مغناطش مورد محاسبه قرار گرفت و نشان داده شد که نتایج در حالت خاصی که مواد خاصیت مغناطیدگی نداشته باشند با محاسبات قبلی در انطباق می‌باشد.

مرجع‌ها

[1] Y.X. Dong, J.J. You, Propagation of polarized photons through a cavity with an anisotropic metamaterial, *Frontiers of Physics* 11 6 (2016) 114208 (1-7).

$$\langle B(r, t) \otimes B(r', t) \rangle = \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar \omega^2}{2\pi^2 \varepsilon_0} \coth \left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T} \right) \left(\frac{n^2(\omega) \varepsilon_i(\omega) + n^4(\omega) \kappa_i(\omega) e^{i\omega|r-r'|/c}}{n^2(\omega) - n^{*2}(\omega)} \frac{1}{|r-r'|} - h.c \right)$$

به همین ترتیب، تابع برهم‌کنش دو نقطه‌ای را برای عملگرهای میدان اتلافگر با استفاده از رابطه ۱۴ محاسبه می‌کنیم. همان‌گونه که از رابطه ۱۴ مشاهده می‌شود، میدان اتلافگر از دو بخش تشکیل شده است، جمله اول مربوط به شرایط اولیه خود میدان اتلافگر دارد و جمله دوم به میدان الکتریکی و مغناطیسی وابسته است. برای محاسبه انرژی میدان الکترومغناطیسی در حضور فرامواد، لازم است که انرژی آزاد اتلافگر از سامانه کل کم شود. بنابراین در تابع برهم‌کنش دو نقطه‌ای برای محاسبه انرژی میدان الکترومغناطیسی، جملات مستقل از میدان الکترومغناطیسی حذف می‌شوند. انرژی آزاد اتلافگر در واقع بیانگر انرژی جذب شده در سامانه می‌باشد که به علت اتلاف در ماده و انرژی نقطه صفر اتلافگرها بوجود می‌آید. با استفاده از رابطه ۳۴، ۴۶ و ۴۷، و انجام محاسبات نسبتاً طولانی، چگالی انرژی سامانه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\langle \rho \rangle = \frac{\hbar}{2\pi^3} \text{Im} \int_0^\infty d\omega \coth \left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T} \right) \left(\frac{\omega}{c} \right)^3 \varepsilon(\omega) \left(n(\omega) + \frac{d(\omega n(\omega))}{d\omega} \right) \left(\frac{\varepsilon_i(\omega) + n^2(\omega) \kappa_i(\omega)}{n^2(\omega) - n^{*2}(\omega)} \right)$$

که رابطه بالا در حالت خاص که قطبش و مغناطش ماده صفر باشد، چگالی انرژی میدان الکترومغناطیسی در حالت خلأ، به رابطه چگالی انرژی میدان الکترومغناطیسی آزاد منتج می‌شود [۱۲]. انرژی جذب شده در فراماده نیز از جملات نوفه ناشی می‌شود و با

- anisotropic metamaterial, *Frontiers of Physics* **11** (2016) 114208 (1-7).
- [10] Y.X. Dong, L. Chun-Ying. "Electromagnetic field quantization and input-output relation for anisotropic magneto dielectric metamaterial." *Chinese Physics B* **24**6 (2015): 064206 (1-7).
- [11] M. Amooshahi, Canonical quantization of electromagnetic field in the presence of nonlinear anisotropic magnetodielectric medium with spatial-temporal dispersion, *International Journal of Theoretical Physics* **55** (2016) 3761-3776.
- [12] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, New York, Wiley, (1998).
- [13] F. Kheirandish, E. Amooghorban, *Finite-temperature Cherenkov radiation in the presence of a magnetodielectric medium*, *Physical. Review A* **82** (2010) 042901(1-14).
- [14] T.G. Philbin, Casimir effect from macroscopic quantum electrodynamics, *New Journal of Physics* **13** (2011) 063026 (1-21).
- [15] M. Jafari, F. Kheirandish, Hamiltonian of mean force and a damped harmonic oscillator in an anisotropic medium, *laser physics* **27** (2017) 015201 (1-5).
- [16] R. Matloob, Electromagnetic field quantization in an absorbing medium, *Physical. Review A* **60** (1999) 50-55.
- [2] V.M. Shalaev, W. Cai, et. Al, Negative index of refraction in optical metamaterials, *Optics Letters* **30** (2005) 3356-3358.
- [3] S. Fleming, Metamaterial hyperlens demonstration of propagation without diffraction, *American Journal of Physics* **85** (2017) 173-177.
- [4] A.O. Bak, E.O. Yoxall, P. Sarriguarte, et.al, Harnessing a Quantum Design Approach for Making Low-Loss Superlenses, *Nano Letter* **16** (2016) 1609-1613.
- [5] M. Khorasaninejad, W.T. Chen, R.C. Devlin, et. al, Metalenses at visible wavelengths: Diffraction-limited focusing and subwavelength resolution imaging, *Science* **352** (2016) 1190-1194.
- [6] J.T. Costa, M.G. Silveirinha, Poynting vector in negative-index metamaterials, *Physical. Review B* **83** (2011) 165120 (1-8).
- [7] S.M. Wang, S.Y. Mu, C. Zhu, Y.X. Gong, P. Xu, H. Liu, T. Li, S.N. Zhu, X. Zhang, Hong-Ou-Mandel interference mediated by the magnetic plasmon waves in a three-dimensional optical metamaterial, *Optical. Express* **20** (2012) 5213-5218.
- [8] M.M. Behbahani, E. Amooghorban, A. Mahdifar, Spontaneous emission and the operation of invisibility cloaks, *Physical. Review A* **94** (2016) 013854 (1-16).
- [9] Y.X. Dong, J.J. You, Propagation of polarized photons through a cavity with an

Quantum investigation of electromagnetic field energies in the presence of metamaterials

Marjan Jafari *

¹Department of Physics, Faculty of Science, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran, 34148 - 96818

Received: 27.10.2016 Final revised: 06.03.2017 Accepted: 29.05.2017

Abstract

We study quantum nature of metamaterials in the presence of electromagnetic field. Starting from a Lagrangian, the electromagnetic field is canonically quantized in the presence of the metamaterials. The equations of motion for the canonical variables are solved using Laplace technique. In the large-time limit, the vector potential operator is found and expressed in terms of the medium operators. In a global thermal state, finite temperature two-point correlation functions of the electromagnetic field are calculated. The electromagnetic energy flux and energy density and absorbed energy in metamaterials are obtained by considering the special case of thermal equilibrium and using Noether's theorem.

Keywords: Correlation function, Electromagnetic field quantization, Metamaterials, Noether's theorem